§ 5.4 ファイバー束とファイブレーションの比較

Def 5.4.1

値域が同じ2つの連続写像

$$\begin{cases} f : X \longrightarrow B \\ g : Y \longrightarrow B \end{cases}$$

に対し、

$$X \times_B Y := \{ (x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(x) \}$$

と定義し、XとYのB上の<u>ファイバー積 (fiber product)</u> という。

また、可換図式

$$\begin{tikzcd} X \times_B Y \arrow[r, "g^*(f)"] \arrow[d, "f^*(g)"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

を<u>プルバック図式</u> (pull back diagram) という。

特に、gがファイブレーションのとき、左の写像

$$f^*(g) : X \times_B Y \longrightarrow X$$

を、<u>gのfによるプルバック</u>という。

$$\left(\begin{tikzcd} X\times_B E \arrow[r] \arrow[d, "f^*(p)"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad X\times_B E \text{ を } f^*(E) \text{ と表すことにする.}\right)$$

__Prop 5.4.2__

ファイブレーション $p: E \to B$ と.
連続写像 $f: X \to B$ に対し.
プルバック
$$f^*(p) : f^*(E) \longrightarrow X$$
はまたファイブレーションになる.

∵

可換な図式

$$\begin{tikzcd} Z\times\{0\} \arrow[r, "h"] \arrow[d, hook] & f^*(E) \arrow[d] \\ Z\times[0,1] \arrow[r, "H"] & X \end{tikzcd}$$

に対し、右斜め上向きの写像

$$\widetilde{H} : Z\times[0,1] \longrightarrow f^*(E)$$

で、図式.

$$\begin{tikzcd} Z\times\{0\} \arrow[r, "h"] \arrow[d, hook] & f^*(E) \arrow[d] \\ Z\times[0,1] \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{H}"] & X \end{tikzcd}$$

の上下の三角を可換にするもの.を構成する.

右側にプルバック図式をつけると、

$$
\begin{tikzcd}
Z \times \{0\} \arrow[r, "h"] \arrow[d, hook] & f^*(E) \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & E \arrow[d] \\
Z \times [0,1] \arrow[r, "H"'] & X \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}
$$

を得る。一番外側の四角を考えると、

$$
\begin{tikzcd}
Z \times \{0\} \arrow[r, "\tilde{f} \circ h"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
Z \times [0,1] \arrow[r, "f \circ H"'] & B
\end{tikzcd}
$$

となる。p はファイブレーションなので、ホモトピー

$$G : Z \times [0,1] \longrightarrow E$$

で、

$$
(*) \begin{cases} G|_{Z \times \{0\}} = \tilde{f} \circ h \\ p \circ G = f \circ H \end{cases}
$$

をみたすものが存在する。

この G を用いて $(z,t) \in Z \times [0,1]$ に対し、

$$\tilde{H}(z,t) = \big(H(z,t),\ G(z,t) \big)$$

とおく。

$$f^*(E) = \{ (x,e) \in X \times E \mid f(x) = p(e) \}$$

で、(可換性(*)から) $f(H(z,t)) = p(G(z,t))$

なので、$\tilde{H}(z,t) \in f^*(E)$.

この $\tilde{H}$ が求める写像であることは、

$$\begin{cases} f^*(p) \circ \tilde{H}(z,t) = H & \text{— ①} \\ \tilde{H}|_{Z\times\{0\}} = h & \text{— ②} \end{cases}$$

を示す必要がある。

$$\begin{tikzcd}
Z \times \{0\} \arrow[r, "h"] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "②"] & f^*(E) \arrow[d, "f^*(p)"] \\
Z \times [0,1] \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, "\tilde{H}"] \arrow[ur, phantom, "①", shift right=3] & X
\end{tikzcd}$$

① は $\tilde{H}(z,t)$ の定義から.

② は $\tilde{H}|_{Z\times\{0\}}(z,t) = \tilde{H}(z,0)$

$= \big(H(z,0),\ G(z,0) \big)$

$= \big(f^*(p)(h(z)),\ \tilde{f}(h(z)) \big)$

$= h(z).$

ファイブレーションのホモトピー不変性について

ファイブレーション $p : E \longrightarrow B$ と、連続写像

$$f_0, f_1 : X \longrightarrow B$$

で、ホモトピック $f_0 \simeq f_1$ なものに対し、

$$f_0^*(E) \quad \text{と} \quad f_1^*(E)$$

の関係を調べたい。

ファイバー束のときは同型だったが、ファイブレーションのときは、そうとは限らない。

例 5.4.3

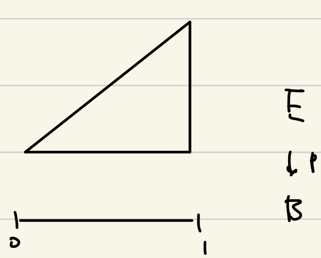
$$E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x \leq 1 \}$$

$$B = [0, 1]$$

で、

$$\begin{array}{cccc} p : & E & \longrightarrow & B \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & (x, y) & \longmapsto & x \end{array}$$

を考える。



X として 1点 $\{*\}$ を考え、

$$\begin{cases} f_0 : X \longrightarrow B \\ f_1 : X \longrightarrow B \end{cases}$$

を、 $f_0(*) = 0$, $f_1(*) = 1$ で定義すると、

(たとえば $H : X \times [0,1] \longrightarrow B$ を $H(*, t) = t$ ととることで)

$f_0 \underset{H}{\simeq} f_1$ である。

一方、
$$\begin{cases} f_0^*(E) = \{(0,0)\} \\ f_1^*(E) = \{1\} \times [0,1] \end{cases}$$

なので、 $f_0^*(E)$ と $f_1^*(E)$ は同相ではない。

Def 5.4.4

$p: E \longrightarrow B$, $p': E' \longrightarrow B'$; ファイブレーション.

(1) p から p' への ファイバーを保つ写像 (fiber-preserving map)
または単に ファイブレーションの写像 とは、2つの写像

$$\begin{cases} \tilde{f} : E \longrightarrow E' \\ f : B \longrightarrow B' \end{cases}$$

で、

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "f"'] & B' \end{tikzcd}$$

を可換にするもの、として定める.

(2) $(f, \tilde{f})$, $(g, \tilde{g})$ が p から p' へのファイブレーションの写像
であるとき.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, shift left, "\tilde{f}"] \arrow[r, shift right, "\tilde{g}"'] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

$(f, \tilde{f})$ から $(g, \tilde{g})$ への ファイバーホモトピー
(fiber homotopy または fiberwise homotopy) とは,
f から g への ホモトピー $H : B \times [0,1] \to B'$ と
$\tilde{f}$ から $\tilde{g}$ への ホモトピー $\tilde{H} : E \times [0,1] \to E'$ の組で,

$$\begin{array}{ccc} E \times [0,1] & \xrightarrow{\tilde{H}} & E' \\ \downarrow{\scriptstyle p \times 1_{[0,1]}} & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ B \times [0,1] & \xrightarrow{H} & B' \end{array}$$

を可換にするもの. のことをいう.

(3) (2) のとき. $(f, \tilde{f})$, $(g, \tilde{g})$ は ファイバーホモトピック
(fiber homotopic または fiberwise homotopic) という.

(4) 特に, $B = B'$ で, $f = g = 1_B$ のとき,
$(1_B, \tilde{f})$ と $(1_B, \tilde{g})$ が

$$H(x, t) = x$$

なる ファイバーホモトピー $(H, \tilde{H})$ で ファイバーホモトピックなら,

$$\tilde{f} \simeq_B \tilde{g}$$

と表す

$$\begin{array}{ccc} E & \overset{\tilde{f}}{\underset{\tilde{g}}{\rightrightarrows}} & E' \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p'} & \\ & B & \end{array}$$

(5) $p: E \longrightarrow B$ と $p': E' \longrightarrow B$ という
底空間が共通なファイブレーションであるとき,
これがファイバーホモトピー同値 (fiber homotopy equivalent)
であるとは,
ファイブレーションの写像
$$(1_B, f) : (B, E) \longrightarrow (B, E')$$
$$(1_B, g) : (B, E') \longrightarrow (B, E)$$
で, $g \circ f \underset{B}{\simeq} 1_E$ かつ $f \circ g \underset{B}{\simeq} 1_{E'}$
なるものが存在することをいう.
このとき, $(B, E) \underset{B}{\simeq} (B, E')$
や $E \underset{B}{\simeq} E'$
と書く.

Thm 5.4.7

$p: E \longrightarrow B$; ファイブレーション
$f, g: X \to B$; 互いにホモトピック ($f \simeq g$) な写像
このとき,
f と g によるプルバックは互いにファイバーホモトピー同値.
$$f^*(E) \underset{X}{\simeq} g^*(E).$$

☺ (方針：f と g の間のホモトピーをリフトして、
$f^*(E)$ と $g^*(E)$ の間のホモトピーをつくる)。

$$H : X \times [0,1] \longrightarrow B$$

を、f から g へのホモトピーとする。

$$\begin{cases} i_0 : X \hookrightarrow X \times [0,1] \\ i_1 : X \hookrightarrow X \times [0,1] \end{cases}$$

を、それぞれ X の、$X \times \{0\}$，$X \times \{1\}$ への包含写像とすると、

$$\begin{cases} f = H \circ i_0 \\ g = H \circ i_1 \end{cases}$$

であり、次の図式を可換にする。

$$\begin{tikzcd}
f^*(E) \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "f^*(p)"'] & E \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"] & B \arrow[d, "\shortparallel"] \\
X \times [0,1] \arrow[r, "H"] & B
\end{tikzcd}$$

また，

$$\begin{tikzcd} f^*(E) \arrow[r, "="] \arrow[dd, "i_0"] & f^*(E) \arrow[d, "p"] \\ & X \arrow[d, "i_0"] \\ f^*(E)\times[0,1] \arrow[r, "p\times 1_{[0,1]}"] & X\times[0,1] \end{tikzcd}$$

も可換． よって 2つを合わせることで，可換図式

$$\begin{tikzcd} f^*(E) \arrow[rr] \arrow[d, "i_0"] & & E \arrow[d, "p"] \\ f^*(E)\times[0,1] \arrow[r, "p\times 1_{[0,1]}"'] \arrow[urr, dashed, "\exists\widetilde{H}"] & X\times[0,1] \arrow[r, "H"'] & B \end{tikzcd}$$

を得る．これは CHP が使える状況で，

$$\widetilde{H} : f^*(E)\times[0,1] \longrightarrow E$$

が存在し，2つの三角は可換となる．
下の三角を書き直せば，

$$\begin{tikzcd} f^*(E)\times[0,1] \arrow[r, "\widetilde{H}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & E \arrow[d, "p"] \\ X\times[0,1] \arrow[r, "H"] & B \end{tikzcd}$$

つまり，$(H,\widetilde{H})$ はファイバーを保つ写像になっている．

この $\widetilde{H}$ を用いて $f^*(E)$ と $g^*(E)$ の間のファイバーホモトピーを作る.
写像 $h : f^*(E) \longrightarrow X \times E$ を.

$$h(x,e) = (x, \widetilde{H}(x,e,1))$$

で定義すると. 図式の可換性から

$$p(\widetilde{H}(x,e,1)) = H(x,1) = g(x)$$

となり.

$$h(x,e) \in g^*(E) := \{ (x,e) \in X \times E \mid g(x) = p(e) \}$$

となる.

これで. ファイブレーションの写像

$$\begin{tikzcd} f^*(E) \arrow[r, "h"] \arrow[d] & g^*(E) \arrow[d] \\ X \arrow[r, equal] & X \end{tikzcd}$$

ができた. 次に. $H'(x,t) := H(x, 1-t)$ とおき.
H のかわりに H' を用いれば.

$$\begin{tikzcd} g^*(E) \arrow[r, "h'"] \arrow[d] & f^*(E) \arrow[d] \\ X \arrow[r, equal] & X \end{tikzcd}$$

が得られる.

ここで、写像 h' は、H' のリフト

$$\tilde{H}' : g^*(E) \times [0,1] \longrightarrow E$$

を用いて、 $h'(x,e) = (x, \tilde{H}(x,e,1))$

として定義される。 (これまでのギロンで、g から出発して得られたもの)

$$f^*(E) \underset{h'}{\overset{h}{\rightleftarrows}} g^*(E)$$

これで $f^*(E)$ から $g^*(E)$ への写像と、その逆向きの写像ができたので、

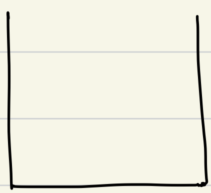
$$\begin{cases} h \circ h' \underset{X}{\simeq} 1_{g^*(E)} \\ h' \circ h \underset{X}{\simeq} 1_{f^*(E)} \end{cases}$$

を示せば OK.

$$K = (\partial[0,1] \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0\})$$

とおく。

K :



0　　1

$$F : f^*(E) \times K \longrightarrow E$$

を、 $x \in X$, $e \in E$, $s, t \in [0,1]$ に対し

$$\begin{cases} F(x, e, 0, t) = \widetilde{H}(x, e, 1-t) \\ F(x, e, 1, t) = \widetilde{H}'(h(x, e), t) \\ F(x, e, s, 0) = \widetilde{H}(x, e, 1) \end{cases}$$

で定める。このとき、

$$\begin{aligned} F(x, e, 0, 0) &= \widetilde{H}(x, e, 1-0) \\ &= \widetilde{H}(x, e, 1) = F(x, e, 0, 0) \\ F(x, e, 1, 0) &= \widetilde{H}'(h(x, e), 0) \\ &= \widetilde{f}(h(x, e)) \\ &= \widetilde{H}(x, e, 1) = F(x, e, 1, 0) \end{aligned}$$

なので、 F は well-defined. かつ連続.

また、次の図式は可換：

$$\begin{tikzcd} f^*(E) \times K \arrow[r, "F"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ f^*(E) \times [0,1] \times [0,1] \arrow[r, "G"] & B \end{tikzcd}$$

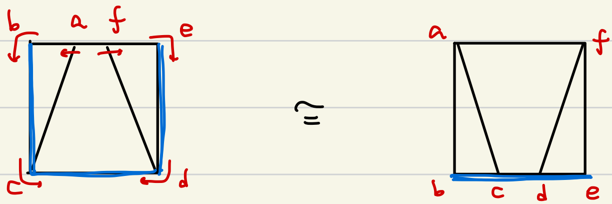
ここで、 $G(x, e, s, t) = H'(x, t) = H(x, 1-t)$.

Claim

位相空間対の同相

$$([0,1]\times[0,1],\ K) \cong ([0,1]\times[0,1],\ [0,1]\times\{0\})$$

がある.



(証明はあとで).

Claimにより、次の可換な図式を得る：

$$\begin{tikzcd}
f^*(E)\times[0,1]\times\{0\} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, hook] & f^*(E)\times K \arrow[r, "F"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
f^*(E)\times[0,1]\times[0,1] \arrow[r] & f^*(E)\times[0,1]\times[0,1] \arrow[r, "G"] & B
\end{tikzcd}$$

$p: E\to B$の

CHPは $(f^*(E)\times[0,1])\times\{0\} \hookrightarrow (f^*(E)\times[0,1])\times[0,1]$

に対して使えるが、Claimの同相により

$$f^*(E)\times K \hookrightarrow (f^*(E)\times[0,1])\times[0,1]$$

にもCHPを用いることができる.

$$
\begin{tikzcd}
f^*(E) \times K \arrow[r, "F"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
f^*(E) \times [0,1] \times [0,1] \arrow[r, "G"] \arrow[ur, "\tilde{F}"] & B
\end{tikzcd}
$$

これにより、右斜め上向きのホモトピー $\tilde{F}$ を得る。

下の三角を書き直すと、

$$
\begin{tikzcd}
f^*(E) \times [0,1] \times [0,1] \arrow[rr, "\tilde{F}"] \arrow[d] & & E \arrow[d, "p"] \\
X \times [0,1] \times [0,1] \arrow[r, "pr"] & X \times [0,1] \arrow[r, "H'"] & B \\
(x, s, t) \arrow[r, mapsto] \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] & (x, t) \arrow[r, mapsto] \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] & H'(x,t) \arrow[u, phantom, sloped, "\in"]
\end{tikzcd}
$$

また、上の三角より

$$\tilde{F}(x, e, 0, t) = F(x, e, 0, t) = \tilde{H}(x, e, 1-t)$$

$$\tilde{F}(x, e, 1, t) = F(x, e, 1, t) = \widehat{H}'(h(x,e), t).$$

を得る。

そこで、写像

$$\varphi : f^*(E) \times [0,1] \longrightarrow f^*(E)$$

を、

$$\varphi(x, e, t) = (x, \widetilde{F}(x, e, t, 1))$$

で定義すると、

$$\varphi(x,e,0) = (x, \widetilde{F}(x,e,0,1))$$
$$= (x, \widetilde{H}(x,e,0))$$
$$= (x, e) \qquad (= 1_{f^*(E)}(x,e))$$

$$\varphi(x,e,1) = (x, \widetilde{F}(x,e,1,1))$$
$$= (x, \widetilde{H}'(h(x,e), 1))$$
$$= h'(h(x,e)) \qquad (= (h' \circ h)(x,e))$$

となり、φ は $1_{f^*(E)}$ と $h' \circ h$ の間のファイバーホモトピー

同様に、$1_{g^*(E)}$ と $h \circ h'$ のものも得られるので、

$$\begin{cases} h \circ h' \simeq_X 1_{g^*(E)} \\ h' \circ h \simeq_X 1_{f^*(E)} \end{cases}$$

□

(Claim の証明)

$$\varphi : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

を、

$$\varphi(s,t) = \max(2\|2s-1\|,\ 2-t)$$

と定める。 (φ は連続)

$$\begin{array}{cccc} H : & [0,1] \times [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \times [0,1] \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & (s,t) & \longmapsto & \left(\dfrac{(1+t)(2s-1) + \varphi(s,t)}{2\varphi(s,t)},\ 2-\varphi(s,t) \right) \end{array}$$

とおくと。

(i) $\|2s-1\| = 1$ のとき。 $(s=0, 1)$

$$H(s,t) = \left(\frac{(1+t)(2s-1)+2}{4},\ 0 \right)$$

(ii) $2\|2s-1\| \geq 2-t$ (≥ 1) のとき。

$$H(s,t) = \left(\frac{(1+t)(2s-1) + 2\|2s-1\|}{4\|2s-1\|},\ 2(1-\|2s-1\|) \right)$$

(iii) $2-t \geq 2\|2s-1\|$ のとき。

$$H(s,t) = \left(\frac{(1+t)(2s-1)+(2-t)}{2(2-t)},\ t \right)$$

(H の逆写像の構成も必要。サボってしまっている)

これにより。 $([0,1] \times [0,1], K) \cong ([0,1] \times [0,1], [0,1] \times \{0\})$

を得る。 $\square$

Cor 5.4.8

B : 弧状連結な空間.

$p : E \longrightarrow B$; ファイブレーション

このとき. 任意の $x, x' \in B$ に対し.

x, x' 上のファイバーは 互いにホモトピー同値.

(証)

(Thm 5.4.7) で. $X = \{*\}$ (一点) とし.

$f(*) = x, \quad g(*) = x'$ とする.

$$f, g : X \longrightarrow B$$

は 連続写像.

B が 弧状連結なので、 x と x' を結ぶ B 上の道

$$\omega : [0, 1] \longrightarrow B$$

で.

$$\omega(0) = x, \quad \omega(1) = x'$$

となるものがあるが. これは. f と g の間のホモトピー.

$f \simeq g$ より. (Thm 5.4.7) から.

$$f^*(E) \simeq g^*(E).$$

ここで. $f^*(E) = p^{-1}(x)$

$$g^*(E) = p^{-1}(x')$$

なので. $p^{-1}(x) \simeq p^{-1}(x')$ □

Cor 5.4.10

ファイブレーション

$$\begin{cases} p : E \longrightarrow B \\ p' : E' \longrightarrow B \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

が、ファイバーホモトピー同値 $E \underset{B}{\simeq} E'$ ならば、

任意の点 $x \in B$ に対し、

$$p^{-1}(x) \simeq p'^{-1}(x).$$

Cor 5.4.12

B が、1点 $b \in B$ に可縮な空間、
$p : E \longrightarrow B$; ファイブレーション、

このとき、 $F := p^{-1}(b)$ とすると、ファイバーホモトピー同値、

$$B \times F \underset{B}{\simeq} E$$

がある。

∵

$H : B \times [0,1] \longrightarrow B$ を、
B を 1点 b に縮めるホモトピーとする。

このとき、

$$\begin{cases} H|_{B \times \{0\}} = 1_B \\ H|_{B \times \{1\}} = c_b \end{cases}$$
: b への定値写像。

(Thm 5.4.7) より

$$1_B^*(E) \underset{B}{\simeq} c_b^*(E)$$

だが、 $1_B^*(E) = E$,

$$\begin{tikzcd} c_b^*(E) \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "c_b"'] & B \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} c_b^*(E) &= \{ (x, e) \in B \times E \mid c_b(x) = p(e) \} \\ &= \{ (x, e) \in B \times E \mid b = p(e) \} \\ &= B \times F \end{aligned}$$

□

Def 5.4.13

ファイブレーション $p: E \to B$ は、
$B \times F \xrightarrow{pr_1} B$ という形のファイブレーションと
ファイバーホモトピー同値のとき、自明 (trivial) である、という。

Thm 5.4.14 (Dold)

連続写像の可換図式、

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\
& B &
\end{tikzcd}
$$

を考える。
B が numerable な被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を持ち、
f が各 U_λ 上でファイバーホモトピー同値ならば、
f はファイバーホモトピー同値。