

§ 5.3 ループ空間について.

(X, x_0) : 基点付き空間 とする.

(X, x_0) に対して, そのループ空間は,

$$\begin{aligned}\Omega X &= \{ \omega : [0, 1] \rightarrow X \mid \text{連続}, \omega(0) = \omega(1) = x_0 \} \\ &= \{ \omega : [0, 1] \rightarrow X \mid \text{連続}, \omega(\{0, 1\}) = x_0 \} \\ &= \{ \omega : [0, 1] \rightarrow X \mid \text{連続}, \omega([0, 1]) = x_0 \}\end{aligned}$$

である. (ΩX は $\text{Map}([0, 1], X)$ の部分位相空間)

さらに書きかえり.

$$\begin{aligned}\Omega X &= \{ \omega : [0, 1] / \sim_{[0, 1]} \rightarrow X \mid \text{連続}, \omega(*) = x_0 \} \\ &= \{ \omega : \mathcal{N}' \rightarrow X \mid \text{連続}, \omega(*) = x_0 \}\end{aligned}$$

と表せる ($*$ は $[0, 1] / \sim_{[0, 1]} \cong \mathcal{N}'$ の基点)

つまり X 上のループ空間とは, $\mathcal{N}'$ から X の基点を保つ連続写像全体のなす空間 のこと. つまり,

$$\Omega X = \text{Map}_+([0, 1], X).$$

§2.3 による ΩX には 1 - π^0 積

$$\begin{array}{ccc} \mu : \Omega X \times \Omega X & \longrightarrow & \Omega X \\ \omega & & \omega \\ (\omega_1, \omega_2) & \longmapsto & \omega_1 * \omega_2 \end{array}$$

が定義されていた. $(\Omega X / \sim = \pi_1(X) \text{ などの群になっている})$

Lem 5.3.1

1 - π^0 積 μ は連続

⑦

ΩX は $\text{Map}([0,1], X)$ の部分空間としてコンパクト位相がはたらいている. 具体的には.

$A \subset [0,1]$, $B \subset X$ に対し.

$$W(A, B) := \{ \omega : [0,1] \rightarrow X \mid \omega(A) \subset B \}$$

である. $\text{Map}([0,1], X)$ の基底は.

$$\{ W(K, U) \mid K \subset [0,1] \text{ ; コンパクト, } U \subset X \text{ ; 開集合} \}$$

で与えられている.

$$\bar{W}(k, u) := W(k, u) \cap \Omega X$$

とわかる。

$$\{\bar{W}(k, u) \mid k \subset [0, 1] \text{ コンパクト}, u \subset X \text{ 開集合}\}$$

が ΩX の 準基底 と なる。

- 1. $[0, 1]$ の コンパクト 部分集合 K は、

有限個の開区間の共通部分の有限和集合として表せる。

$$K = \bigcap_{i=1}^n [t_i, t'_i]$$

と なる。

$$W\left(\bigcap_{i=1}^n [t_i, t'_i], u\right) = \bigcap_{i=1}^n W([t_i, t'_i], u)$$

よって、結局 ΩX の 準基底 は

$$\{\bar{W}([s, t], u) \mid 0 \leq s < t \leq 1, u \subset X \text{ 開}\}$$

と 与えられる。

よって、 μ の 連続性 を 示すためには、

開集合 $U \subset X$ に対し、

$$\mu^{-1}(\bar{W}([s, t], u)) = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega X \times \Omega X \mid \mu(\omega_1, \omega_2)([s, t]) \subset U\}$$

が $\Omega X \times \Omega X$ で 開 であること を 示せばよい。

そのために, $\mu^{-1}(\overline{W}([s, t], U))$ は (ω_1, ω_2) であり
 その点 ω $\mu^{-1}(\overline{W}([s, t], U))$ 内での開近傍を与える.

$$\mu(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 * \omega_2 \quad ; \quad [0, 1] \rightarrow X$$

$$\omega_1 * \omega_2(u) := \begin{cases} \omega_1(2u) & , \quad 0 \leq u \leq \frac{1}{2} \\ \omega_2(2u-1) & , \quad \frac{1}{2} \leq u \leq 1 \end{cases}$$

であった. 故に, 次の 3通り の場合 を 考える.

(i) $\frac{1}{2} \in [s, t]$ のとき. $s \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leq t$ の場合.

$$\mu(\omega_1, \omega_2)([s, t]) \subset U$$

$$\omega_1 * \omega_2([s, t]) \subset U \quad \begin{array}{c} s \quad \frac{1}{2} \quad t \\ | \quad | \quad | \\ 0 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \end{array}$$

$$(p) \quad u \in [s, \frac{1}{2}] \text{ のとき, } \omega_1 * \omega_2(u) = \omega_1(2u)$$

$$\left(\omega_1 * \omega_2(s) = \omega_1(2s), \quad \omega_1 * \omega_2(\frac{1}{2}) = \omega_1(1) \right)$$

$$\text{よって, } \omega_1([2s, 1]) \subset U$$

$$(1) \quad u \in [\frac{1}{2}, t] \text{ のとき, } \omega_1 * \omega_2(u) = \omega_2(2u-1)$$

$$\left(\omega_1 * \omega_2(\frac{1}{2}) = \omega_2(0), \quad \omega_1 * \omega_2(t) = \omega_2(2t-1) \right)$$

$$\text{よって, } \omega_2([0, 2t-1]) \subset U.$$

$$(p), (1) \text{ より, } \omega_1([2s, 1]) \subset U \text{ かつ } \omega_2([0, 2t-1]) \subset U.$$

$\therefore \overline{W}([2s, 1], U) \times \overline{W}([0, 2t-1], U) \text{ は } (\omega_1, \omega_2) \text{ の 開近傍.}$

(ii) $s < t < \frac{1}{2}$ の場合

$$\mu(\omega_1, \omega_2)([s, t]) \subset U \quad \text{よ}.$$

$$\omega_1 * \omega_2([s, t]) \subset U, \quad \begin{array}{c} 0 \quad s \quad t \quad \frac{1}{2} \quad 1 \\ | \text{---} | \text{---} | \text{---} | \end{array}$$

$$s, t < \frac{1}{2} \quad \text{よ} \quad \omega_1 * \omega_2(u) = \omega_1(2u)$$

$$(\omega_1 * \omega_2(s) = \omega_1(2s), \quad \omega_1 * \omega_2(t) = \omega_1(2t))$$

$$\therefore \omega_1([2s, 2t]) \subset U.$$

$$\therefore \overline{W}([2s, 2t], U) \times \Omega X \quad \text{よ} \quad (\omega_1, \omega_2) \text{ の } \mu \text{ 近傍.}$$

(iii) $\frac{1}{2} < s$ の場合. $(\frac{1}{2} < s < t)$

$$\mu(\omega_1, \omega_2)([s, t]) \subset U \quad \text{よ}. \quad \begin{array}{c} 0 \quad \frac{1}{2} \quad s \quad t \quad 1 \\ | \text{---} | \text{---} | \text{---} | \end{array}$$

$$\omega_1 * \omega_2([s, t]) \subset U.$$

$$\frac{1}{2} < s < t \leq 1 \quad \text{よ} \quad \omega_1 * \omega_2(u) = \omega_2(2u-1)$$

$$(\omega_1 * \omega_2(s) = \omega_2(2s-1), \quad \omega_1 * \omega_2(t) = \omega_2(2t-1))$$

$$\therefore \omega_2([2s-1, 2t-1]) \subset U.$$

$$\therefore \Omega X \times \overline{W}([2s-1, 2t-1], U) \quad \text{よ} \quad (\omega_1, \omega_2) \text{ の } \mu \text{ 近傍}$$

(i) ~ (iii) よ. $\mu^{-1}(\overline{W}([s, t], U))$ において, 任意の点 (ω_1, ω_2) の μ 近傍 $\text{よ} \quad \text{よ} \quad \text{よ} \quad \mu^{-1}(\overline{W}([s, t], U))$ は μ

逆元について

$$\begin{array}{ccc} \nu : \Omega X & \longrightarrow & \Omega X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \omega & \longmapsto & \nu(\omega) \end{array}$$

すなわち, $\nu(\omega)(t) = \omega(1-t)$ で定める (逆元)

また, $e(t) = x_0$ とする. 次に成り立つ.

Prop 5.3.3

ν は連続であり.

$$\mu \circ (1_{\Omega X} \times \nu) \simeq C_{x_0}$$

$$\mu \circ (\nu \times 1_{\Omega X}) \simeq C_{x_0}$$

$$\mu \circ (1_{\Omega X} \times e) \simeq 1_{\Omega X}$$

$$\mu \circ (e \times 1_{\Omega X}) \simeq 1_{\Omega X}$$

(証明は ... 気になったとき書く).

Rem

(Prop 5.3.2)

たとえば. $\mu \circ (1_{\Omega X} \times \mu) \simeq \mu \circ (\mu \times 1_{\Omega X})$

が成り立つこと. 図式

$$\begin{array}{ccc} \Omega X \times \Omega X \times \Omega X & \longrightarrow & \Omega X \times \Omega X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega X \times \Omega X & \longrightarrow & \Omega X \end{array}$$

が ホモトピー-可換 (homotopy commutative) といふ.

Def 5.3.6

基点つきの空間 X と連続写像

$$\mu : X \times X \longrightarrow X$$

$$\nu : X \longrightarrow X$$

で、次の 5 つの条件を満たすものが存在するとき、

これを Hopf 空間 (Hopf space, H-space) といふ:

$$\begin{cases}
 (5.3) & \mu \circ (1_X \times \mu) \simeq \mu \circ (\mu \times 1_X) \\
 (5.4) & \mu \circ (1_X \times \nu) \simeq * \\
 (5.5) & \mu \circ (\nu \times 1_X) \simeq * \\
 (5.6) & \mu \circ (1_X \times *) \simeq 1_X \\
 (5.7) & \mu \circ (* \times 1_X) \simeq 1_X
 \end{cases}$$

Thm 5.3.9

X : 弓状連結な CW 複体

$\mu : X \times X \rightarrow X$: 連続写像

μ 上の条件のうち、(5.4)(5.5)以外を代えたのは、

式 (5.4)(5.5) を代えた連続写像

$$\nu : X \rightarrow X$$

が存在する。