

第5章 ファイブレーション

§2. Nerve ファイブレーション, Hurewicz ファイブレーション

ここでは証明したファイバー束の持つ性質で、
特に重要なもの 4つ.

(1) 被覆ホモトピー定理 (Thm 4.3.7)

$p: E \rightarrow B$: ファイバー束.

X : 局所コンパクト Hausdorff空間 とす.

外側は可換な図式. ($H(x,0) = f(x)$)

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow & \nearrow \exists \tilde{H} & \downarrow p \\ X \times [0,1] & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

外側は可換な図式. 図式を可換にするホモトピー

$$\tilde{H}: X \times [0,1] \rightarrow E$$

が存在する.

(2) ホモトピー群の長い完全列 (系 4.8.11)

$$p: E \rightarrow B \quad ; \quad F \text{ は } F\text{-纤维束.}$$

このとき,

$$\cdots \rightarrow \pi_n(F) \rightarrow \pi_n(E) \rightarrow \pi_n(B)$$

$$\rightarrow \pi_{n-1}(F) \rightarrow \pi_{n-1}(E) \rightarrow \pi_{n-1}(B)$$

$$\rightarrow \cdots$$

$$\rightarrow \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(E) \rightarrow \pi_1(B)$$

なる群の完全列が存在する。

(3) ホモトピー不変性 (Thm 4.3.27)

$$p: E \rightarrow B \quad ; \quad F\text{-纤维束.}$$

X : 110うコンパクト Hausdorff 空間.

$$f, g: X \rightarrow B \quad ; \quad \text{連続関数} \quad \text{の時.}$$

もし, $f \simeq g$ ならば, F -束の同型

$$f^*(E) \cong g^*(E)$$

を得る。

(4) 分類定理 (Thm 4.5.23)

適当な条件を満たす位相群に対し.

分類空間とファイバー空間 BG が存在し.

任意の CW 複体 X に対し. 自然な全単射.

$$P_G(X) \cong [X, BG]$$

が存在する.

(ここで $P_G(X)$ は.
空間 X 上の G 束の同型類全体の集合)

この中でも, (1) が最も大切.

なので, (1) の性質に名前をつける.

Def 5.2.1 (CHP)

$p: E \rightarrow B$; 連続写像

X : 位相空間.

p が X に対し, 被覆ホモトピー性質 (Covering homotopy property) を持つとは, 可換図式.

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ X \times [0,1] & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

に対し, 右斜め上向きな写像

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow & \nearrow \exists \tilde{H} & \downarrow p \\ X \times [0,1] & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

で図式を可換にするものが存在することに定める.

(以下 CHP と書く).

Def 5.2.2

連続写像 $p: E \rightarrow B$ がある。

Serre ファイブレーション (Serre fibration) であるとは、

p が 任意の CW 複体 に対し CHP を持つこと、と定義する。

$p: E \rightarrow B$ が Hurewicz ファイブレーション であるとは、

p が 任意の位相空間 に対し、CHP を持つこと、と定義する。

どちらの場合も、ファイバー束の場合になつて、

B を 底空間、 E を 全空間、 p を 射影 とし、
 $x \in B$ に対し、 $p^{-1}(x)$ を x 上のファイバー とする。

$$\{\text{Serre ファイブレーション}\} \supset \{\text{Hurewicz ファイブレーション}\}$$

Cor 5.2.4

ファイバー束は Serre ファイブレーション。

また、特に底空間がハウスドルフ空間であるファイバー束は Hurewicz ファイブレーション

⑤ (服部 位相幾何学 系 9.4 前後の注) より.

ファイバー束は 任意の 110 コンパクト Hausdorff 空間 に対し.
CHP を持つ.

一方, CW 複体 は 110 コンパクト Hausdorff 空間 である.

任意のファイバー束 は Serre ファイブレーション.

特に, 底空間 が 110 コンパクト Hausdorff 空間 である

ファイバー束 は (Thm 4.3.16) より 任意の位相空間 に対し.

CHP を持つ.

よて, Hurewicz ファイブレーション である.

□

例) 5.2.6 (ファイバー束 である Hurewicz ファイブレーション)

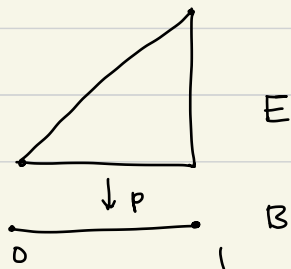
$$E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x \leq 1 \}$$

$$B = [0, 1] \quad \text{である.}$$

$$p : E \longrightarrow B$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ (x, y) & \mapsto & x \end{array}$$

と定めると, p は Hurewicz ファイブレーション



② 任意の空間 X 上、連続写像

$$H: X \times [0, 1] \longrightarrow B$$

$$f: X \longrightarrow E$$

で、次の図式を可換にするものを探そう。

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ X \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & B \end{array} \quad \begin{array}{c} \triangle \\ \downarrow p \\ \text{---} \end{array}$$

p は X に対し CHP を持つこと。を示すため、
上の図式に当てはまる写像

$$\tilde{H}: X \times [0, 1] \longrightarrow E$$

を見つけよう。

まず、 $x \in X$ に対し、

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x)) \in E$$

と書く。

さらに、 $(x, t) \in X \times [0, 1]$ に対し、

$$\tilde{H}(x, t) = (H(x, t), \min\{H(x, t), f_2(x)\}) \in E$$

とおく。 $\tilde{H}$ は連続

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow & \nearrow \bar{H} & \downarrow p \\ X \times [0,1] & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

$$H(x,0) = p \circ f(x) = f_1(x) \quad (\text{外側の可換性})$$

$$p \circ \bar{H}(x,t) = H(x,t).$$

$$\begin{aligned} \bar{H}(x,0) &= (H(x,0), \min(H(x,0), f_2(x))) \\ &= (f_1(x), \min(f_1(x), f_2(x))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\odot) \quad & f(x) = (f_1(x), f_2(x)) \in E \text{ かつ} \\ & 0 \leq f_1(x) \leq f_2(x). \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} (\ominus) \quad & (f_1(x), f_2(x)) \\ & = f(x). \end{aligned}$$

よて、図式は可換。

ゆえに、 $p: E \rightarrow B$ は Hurewicz ファイブレーション。

$$\text{一方で、} \quad p^{-1}(0) = \{(0,0)\}, \quad p^{-1}(1) = \{1\} \times [0,1]$$

で、 $p^{-1}(0) \not\subseteq p^{-1}(1)$ なので、ファイブレーションではない。

重要な (Hurewicz) ファイブレーションを導入する。

Def 5.2.7

基点 x_0 を持つ基点つき空間 X に対し、その パス空間 (path space)

$P(X, x_0)$ を

$$P(X, x_0) = \{ \omega: [0,1] \rightarrow X \mid \omega \text{ は連続, } \omega(0) = x_0 \}$$

で定める。(PXとも表す) PX には、 $\text{Map}([0,1], X)$ の

部分空間として位相を入す。

↑
これは $[0,1]$ の位相が X の位相から来ている。

Prop 5.2.8

写像 $p: PX \rightarrow X$ がある。

$$\begin{array}{ccc} \omega & \xrightarrow{\quad} & \omega(1) \end{array}$$

これは連続で、 p は Hurewicz ファイブレーション。

Def 5.2.9

このファイブレーションを 1.0 スルーフ・ファイブレーション とする。

(-) (p の連続性はあてで)

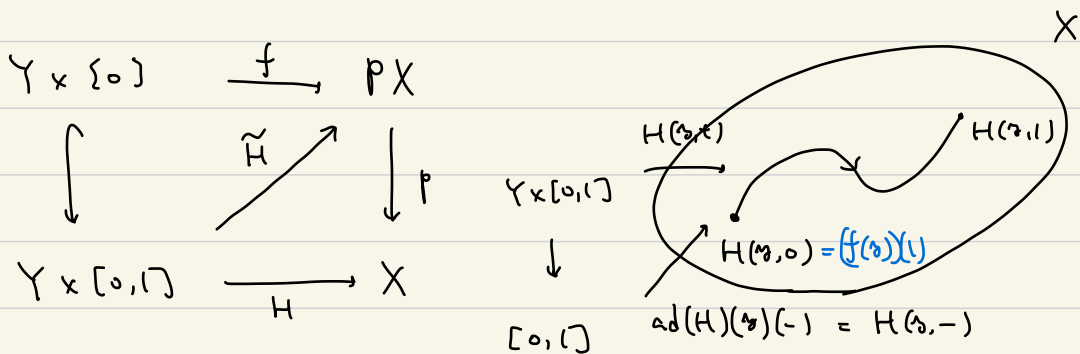
p が CHP を持つことを示すので、次の可換図式。

$$\begin{array}{ccc} Y \times \{0\} & \xrightarrow{f} & PX \\ \downarrow & & \downarrow p \\ Y \times [0,1] & \xrightarrow{H} & X \end{array} \quad (5.1)$$

があるときには、 H のリフト

$$\tilde{H}: Y \times [0,1] \longrightarrow PX$$

を見つける。



各 $\gamma \in Y$ に対し、 $f(\gamma) \in PX$ は X 内の道であり、

$H(\gamma, t)$ で、 t を動かしてできる写像

$$ad(H)(\gamma) : [0,1] \longrightarrow X$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow$
 $t \quad \quad H(\gamma, t)$

も、 X 内の道。 (5.1) が可換なのは、

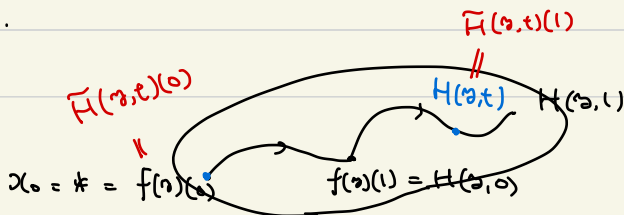
$$H(\gamma, 0) = p(f(\gamma)) = (f(\gamma))(1) \quad (f(\gamma) \text{ は } X \text{ 内の道})$$

つまり、「道 $f(\gamma)$ の終点」と「道 $ad(H)(\gamma)$ の始点」が一致している。

よって、この2つの道をつなぐことができる。

$$\text{道 } f(\gamma) * ad(H)(\gamma)$$

を得る。



$$(f(y) * \text{ad}(H)(y))(t) = \begin{cases} f(y)(2t) & , \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H(y, 2t-1) & , \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

一方、 H のリフトであるホモトピー -

$$\tilde{H} : Y \times [0, 1] \longrightarrow PX$$

の満たすなければならない条件は、

$$\begin{cases} p(\tilde{H}(y, t)) = H(y, t) \\ \tilde{H}(y, 0) = f(y) \end{cases}$$

つまり、 $\tilde{H}(y, t)$ は、終点 $p(\tilde{H}(y, t)) = H(y, t)$ であるような X 内の道、であり、 $\tilde{H}(y, 0) = f(y)$ であるようなもの、
 こそは、

$$(\tilde{H}(y, t))(s) = \begin{cases} f(y)(s(1+t)) & , \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{1+t} \\ H(y, s(1+t)-1) & , \quad \frac{1}{1+t} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

で得られる。

p の連続性は 次の Claim から従う。

Claim (Cor 5.2.10)

X は 局所コンパクト Hausdorff 空間. 対して,

任意の空間 Y へ, $x \in X$ に対し,

$$ev_x(f) = f(x)$$

で定義された写像

$$\begin{array}{ccc} ev_x : \text{Map}(X, Y) & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ f & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

は連続.

Rem 5.2.11

$p : PX \rightarrow X$ は $\mathcal{F}_p$ -束で $\mathcal{F}_p$ は $\mathcal{F}_x$ である.

例) $x = *$. 基点上の $\mathcal{F}_p$ -束.

$$p^{-1}(*) = \{ \omega : [0, 1] \rightarrow X \mid \omega(0) = \omega(1) = * \}$$

だが, 基点以外の $\mathcal{F}_p$ -束.

$$p^{-1}(x) = \{ \omega : [0, 1] \rightarrow X \mid \omega(0) = *, \omega(1) = x \}$$

なので, $* \neq x$ ならば, $p^{-1}(*) \cap p^{-1}(x) = \emptyset$.

なお, $p^{-1}(x_0) = \Omega(X, x_0) = \{\omega: [0, 1] \rightarrow X \mid \omega(0) = \omega(1) = x_0\}$
で, これを $P(X, x_0)$ の部分位相空間と可なり.

Def 5.2.12

基点付き空間 (X, x_0) に対し,

集合 $\Omega(X, x_0)$ に $\mathcal{J}$ -ノリト用位相を入れたものを,

X の ループ空間 (loop space) とよぶ.