§4.3 ファイバー束とホモトピー

Q.

ξ を B 上のファイバー束とする

連続写像 $f, g : X \longrightarrow B$ によるプルバック

$$f^*\xi, \quad g^*\xi$$

はいつ同型になるか?

A.

$f \simeq g$ (ホモトピック) なら $f^*\xi \cong g^*\xi$

これを示すのが目標。

Def 4.3.2 (ホモトピー)

$f_0, f_1 : X \to Y$; 連続写像。

もし、連続写像

$$H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$$

で、任意の $x \in X$ に対し、

(1) $H(x, 0) = f_0(x)$

(2) $H(x, 1) = f_1(x)$

であるものが存在するとき、f_0 と f_1 はホモトピック (homotopic) であるといい、$f_0 \simeq f_1$ とかく。

また、H を、f_0 と f_1 の間のホモトピー (homotopy) という

Rem 4.3.4

H が f_0 と f_1 の間のホモトピーであるとき、

$t \in [0,1]$, $x \in X$ に対し、写像

$$f_t : X \to Y$$

を、

$$f_t(x) := H(x,t)$$

で定義できる。つまり、

$$f_t(x) = \left(\mathrm{ad}(H)(t)\right)(x)$$

$$(H : X \times [0,1] \to Y)$$

(Lem 3.4.2) より、$\forall t \in [0,1]$, $f_t : X \to Y$ は連続。

t が 0 から 1 まで動くとき、連続写像 f_0 が f_1 に「連続的に」変化することを意味する。

Thm 4.3.7 (ホモトピーのリフト)

次の状況を考える：

(1) $p : E \to Y$, $p' : E' \to X$ はファイバー束.

(2) $(\tilde{f}_0, f_0) : (E', X) \longrightarrow (E, Y)$

は. ファイバーを保つ写像

(3) $H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ は.

$\forall x \in X, \quad H(x,0) = f_0(x)$

となるホモトピー

このとき、もし X がコンパクト Hausdorff ならば.

H の束写像へのリフト.

$$\begin{tikzcd}
E' \times [0,1] \arrow[r, "\tilde{H}"] \arrow[d, "p' \times 1_{[0,1]}"'] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times [0,1] \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

で. $\forall e \in E'$, $\tilde{H}(e,0) = \tilde{f}_0(e)$ となるものが存在.

$$\begin{tikzcd}
E' \times \{0\} \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "="] \arrow[dd] & & E' \times [0,1] \arrow[dr, dashed, "\tilde{H}"] \arrow[dd] & \\
& E' \arrow[rr, "\tilde{f}_0"] \arrow[dd] & & E \arrow[dd] \\
X \times \{0\} \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "="] & & X \times [0,1] \arrow[dr, "H"] & \\
& X \arrow[rr, "f_0"] & & Y
\end{tikzcd}$$

アイデア

$p: E \to Y$ が自明束の場合．$\widetilde{H}$ はすぐ作れる．
実際，　$E = Y \times F$ で，　$\widetilde{f}_0(e) = (\widetilde{f}_0'(e), \widetilde{f}_0''(e))$
と書けているなら．

$$\widetilde{H}(e,t) = (H(p(e),t), \widetilde{f}_0''(e))$$

そこで．$E \to Y$ を自明束に分割して
それに従って $E' \to X$ も分割していく．
各自明束上では $\widetilde{H}$ が構成できているので．
後はそれらを貼り合わせる．

証明に必要な定理や補題を準備する．

Thm

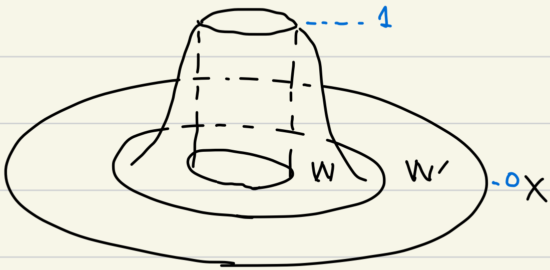
コンパクト Hausdorff 空間は正規 (normal)

(あとで示す(かも))

Thm 4.3.9 (Urysohn の補題)

X が正規で、
$W \subset W' \subset X$ が $\overline{W} \subset W'$ をみたす
X の開集合とすると、連続写像
$u : X \longrightarrow [0,1]$
で、次をみたすものが存在。

$$\begin{cases} (1) & u(\overline{W}) = 1 \\ (2) & u(X \setminus W') = 0 \end{cases}$$



(あとで示す(かも))

Lem 4.3.10

X : コンパクト とする.

$X \times [0,1]$ の任意の開被覆 $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に対して.

$[0,1]$ の分割

$$0 < \frac{1}{l} < \frac{2}{l} < \cdots < \frac{l-1}{l} < 1$$

と, X の開集合

$$U_{1,1}, \cdots, U_{n_1,1}, \cdots, U_{1,l}, \cdots, U_{n_l,l} \quad (\subset X)$$

で, 次の条件をみたすものがとれる:

$$W_1 = \left[0, \frac{4}{3l}\right), \quad W_2 = \left(\frac{2}{3l}, \frac{7}{3l}\right), \cdots, \quad W_l = \left(\frac{3l-4}{3l}, 1\right]$$

とおくとき.

(1) $\bigcup_{k=1}^{l} \bigcup_{i=1}^{n_k} U_{i,k} \times W_k = X \times [0,1]$

(2) 各 (i,k) に対し.

$$U_{i,k} \times W_k \subset V_\alpha$$

となる $\alpha \in A$ が存在.

(証明)

任意の $(x,t) \in X \times [0,1]$ に対し

$$(x,t) \in (U_{x,t} \times V_{x,t}) \subset V_\alpha$$

となる α が存在するような開集合

$$U_{x,t} \subset X \quad と \quad V_{x,t} \subset [0,1]$$

がとれる。

(これは直積位相の基本近傍系をとってくればよい。)

各 $t \in [0,1]$ に対し $\{U_{x,t}\}_{x \in X}$ は X の開被覆だから、X がコンパクトなので、その中から有限個

$$U_{x_1,t}, \dots, U_{x_{n_t},t}$$

を選び、X を覆うことができる。そこで

$$V_t = \bigcap_{i=1}^{n_t} V_{x_i,t}$$

とおく。

$$\bigcup_{i=1}^{n_t} (U_{x_i,t} \times V_t) = X \times V_t.$$

次に、$\{V_t\}_{t \in [0,1]}$ は $[0,1]$ の開被覆であり、$[0,1]$ はコンパクト距離空間だから (Lem 2.2.8) より $\{V_t\}_{t \in [0,1]}$ の Lebesgue 数 σ が存在する。

つまり、任意の部分集合 $A \subset [0,1]$ で、
$d(A) < \sigma$ であるものに対し、
$A \subset V_{t_k}$ となる $t_k \in [0,1]$ が存在する。

$\frac{5}{3l} < \sigma$ となるように十分大きく $l \in \mathbb{N}$ をとる。

$$W_1 = \left[0, \frac{4}{3l}\right), \ W_2 = \left(\frac{2}{3l}, \frac{7}{3l}\right), \ \cdots, \ W_l = \left(\frac{3l-4}{3l}, 1\right]$$

とおくと、$d(W_k) \leq \frac{5}{3l}$ となるので、各 k に対し、
$W_k \subset V_{t_k}$ となる $t_k \in [0,1]$ が存在する。

($W_k = \left(\frac{3k-4}{3l}, \frac{3k+1}{3l}\right)$ となっているので、
$d(W_k) = \left(\frac{3k+1}{3l}\right) - \left(\frac{3k-4}{3l}\right) = \frac{5}{3l}$)

このとき、各 k に対し、
$$\bigcup_{i=1}^{n_{t_k}} \left(U_{x_i, t_k} \times V_{t_k}\right) = X \times V_{t_k}$$

であり、$1 \leq i \leq n_{t_k}$ に対し、
$$\left(U_{x_i, t_k} \times W_k\right) \subset \left(U_{x_i, t_k} \times V_{x_i, t_k}\right) \subset V_\alpha$$

ゆえに、これが求める $[0,1]$ の分割

$$0 < \frac{1}{l} < \frac{2}{l} < \cdots < \frac{l-1}{l} < 1$$

と、X の開被覆 $\{U_{x_i, t_k}\}_{\substack{1 \leq i \leq n_t \\ 1 \leq t \leq l}}$ である □

[Thm 4.3.7 の証明]

$\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を、各 V_α 上で $E \to Y$ の局所自明化写像が存在する Y の開被覆とする。また、

$$\varphi_\alpha : p^{-1}(V_\alpha) \longrightarrow V_\alpha \times F$$

を、V_α 上の局所自明化写像とする。

$$H : X \times [0,1] \longrightarrow Y \subset \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$$

$$X \times [0,1] = H^{-1}(Y) = H^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in A} H^{-1}(V_\alpha)$$ より

$\{H^{-1}(V_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ は $X \times [0,1]$ の開被覆。

なので (Lem 4.3.10) より、$[0,1]$ の分割

$$0 < \frac{1}{l} < \frac{2}{l} < \cdots < \frac{l-1}{l} < 1$$

と、開集合

$U_{1,1}, \cdots, U_{n_1,1}, \cdots, U_{1,l}, \cdots, U_{n_l,l} \subset X$ で、

$$\bigcup_{k=1}^{l} \bigcup_{i=1}^{n_k} (U_{i,k} \times W_k) = X \times [0,1]$$

かつ、各 (i,k) に対し $U_{i,k} \times W_k \subset H^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$ となる

$\alpha \in A$ が存在するもの、A'' とする。

ここで、

$$W_1 = \left[0, \frac{4}{3l}\right), \quad W_2 = \left(\frac{2}{3l}, \frac{7}{3l}\right), \cdots,$$

$$W_k = \left(\frac{3k-4}{3l}, \frac{3k+1}{3l}\right), \quad W_{k+1} = \left(\frac{3k-1}{3l}, \frac{3k+4}{3l}\right)$$

$$, \cdots, \quad W_l = \left(\frac{3l-4}{3l}, 1\right]$$

ここで $t_k = \frac{k}{l}$ とおくと、各 k に対し、

$\left(\frac{k}{l} = \frac{3k}{3l} =\right)$ $t_k \in W_k \cap W_{k+1}$.

k に関する帰納法で $\tilde{H}$ を $E' \times [0, t_k]$ の上に構成する。

$k=0$ のとき、$E' \times \{0\}$ 上では $\tilde{f}_0$ を用いる。

つまり、

$$(\tilde{f}_0, f_0) : (E', X) \longrightarrow (E, Y) \quad ; \text{ファイバーを保つ写像。}$$

$$\tilde{f}_0(e) = (\tilde{f}_0'(e), \tilde{f}_0''(e)) \quad (\in Y \times F).$$

と書いたとき、

$$\tilde{H}(e, 0) = (H(p'(e), 0), \tilde{f}_0''(e))$$

で $\tilde{H}$ を定める。

$E' \times [0, t_k]$ まで定義されていたとして，これを $E' \times [0, t_{k+1}]$ 上まで拡張する．

まず，$E' \times [t_k, t_{k+1}]$ 上で $\widetilde{H}$ を定義するため，
$X \times [t_k, t_{k+1}]$ を上手く分割する．
(Thm 4.3.8) より X は正規なので，$x \in U_{i,k+1}$ のとき，

$$x \in O, \quad \overline{O} \subset O', \quad \overline{O'} \subset U_{i,k+1}$$

となる X の開集合の組 (O', O) が存在する．
X はコンパクトなので，その中から有限個の組
$\{(O_j', O_j)\}_{j=1,\cdots,s}$ を選んで，$X = \bigcup_{j=1}^{s} O_j$ とできる．

$[0, 1]$ の代わりに $[t_k, t_{k+1}]$ を使い，各 (O_j', O_j) に Urysohn の補題を適用すれば，
連続関数 $u_j : X \longrightarrow [t_k, t_{k+1}]$ で，

$$\begin{cases} u_j(\overline{O_j}) = t_{k+1} \\ u_j(X \setminus O_j') = t_k \end{cases}$$

となるものがとれる．

これらの関数を用いて、 $x \in X$ に対し、

$$\begin{cases} \tau_0(x) = t_k, \\ \tau_j(x) = \max\{u_1(x), \ldots, u_j(x)\} \end{cases}$$

とおく。すると、

$$t_k = \tau_0(x) \leq \underset{\underset{u_1(x)}{\shortparallel}}{\tau_1(x)} \leq \cdots \leq \tau_s(x) = t_{k+1}$$

となる。そして、

境界がグラフになっている。

$$X_j := \{(x,t) \in X \times [t_k, t_{k+1}] \mid t \leq \tau_j(x)\}$$

とおく。

これで、 $X \times [t_k, t_{k+1}]$ を、閉部分集合の増加列

$$X_0 = X \times \{t_k\} \subset X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_s = X \times [t_k, t_{k+1}]$$

として表せた。

$E' \times [0,1]$ を $X_j \times [0,1]$ に制限したファイバー束を E'_j とすると、ファイバー束の増加列

$$E'_0 = E' \times \{t_k\} \subset E'_1 \subset \cdots \subset E'_s = E' \times [t_k, t_{k+1}]$$

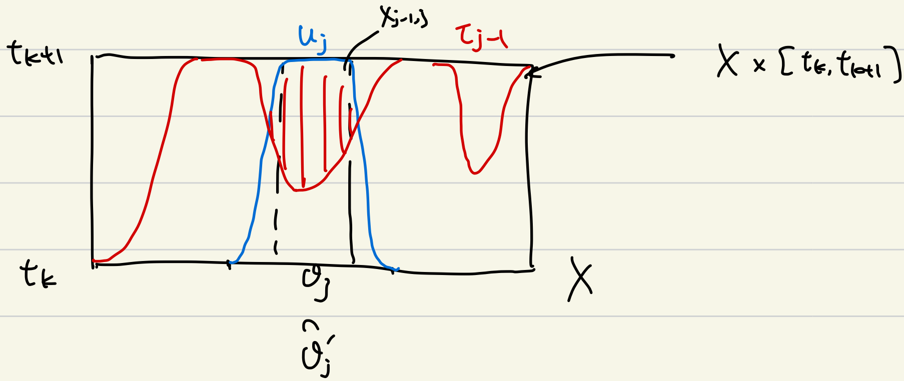
を得る。

そこで、帰納的に求めるホモトピーが E'_{j-1} 上まで定義できた
とする。 それを $\tilde{H}_{j-1}$ とする。
これを拡張して

$$\tilde{H}_j : E'_j \longrightarrow E$$

を作る。そのために、X_j を X_{j-1} とそれ以外に分ける。
$1 \leq j \leq s$ に対し 次の図のように

$$X_{j-1,j} = \{ (x,t) \in \overline{O'_j} \times [t_k, t_{k+1}] \mid \tau_{j-1}(x) \leq x \leq \tau_j(x) \}$$



とおくと、構成の仕方から、$U_{i,k+1}$, V_α が存在して

$$\begin{cases} X_{j-1,j} \subset \overline{O'_j} \times [t_k, t_{k+1}] \\ \overline{O'_j} \times [t_k, t_{k+1}] \subset U_{i,k+1} \times [t_k, t_{k+1}] \\ H(U_{i,k+1} \times [t_k, t_{k+1}]) \subset V_\alpha \end{cases}$$

また、 $E'_{j-1,j} = E'|_{X_{j-1,j}}$ とおくと、

$$E'_j = E'_{j-1} \cup E'_{j-1,j}$$

V_α 上での $E \to Y$ の 局所自明化写像を

$$\begin{array}{cccc} \varphi_\alpha : & p^{-1}(V_\alpha) & \longrightarrow & V_\alpha \times F \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & e & \longmapsto & (p(e), \overline{\varphi_\alpha}(e)) \end{array}$$

とする。 $(e, t) \in E'_{j-1,j}$ に対し、

$$\widetilde{H}_j(e,t) = \varphi_\alpha^{-1}\Big(H(p'(e), t), \overline{\varphi_\alpha}\big(\widetilde{H}_{j-1}(e, \tau_{j-1}(p'(e)))\big)\Big)$$

とおく。

$\widetilde{H}_j$ は $E'_{j-1,j}$ 上で連続であり、

$$\widetilde{H}_j|_{E'_{j-1}} = \widetilde{H}_{j-1}$$

さらに、 $E'_{j-1,j}$ と E'_{j-1} の境界上 , つまり

$t = \tau_{j-1}(p'(e))$ のときは、

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \varphi_\alpha^{-1}\left(H(p'(e),t),\ \overline{\varphi_\alpha}(\widetilde{H}_{j-1}(e,t))\right) \\
&= \varphi_\alpha^{-1}\left(p\circ\widetilde{H}_{j-1}(e,t),\ \overline{\varphi_\alpha}(\widetilde{H}_{j-1}(e,t))\right) \\
&= \varphi_\alpha^{-1}\circ\varphi_\alpha\left(\widetilde{H}_{j-1}(e,t)\right) \\
&= \widetilde{H}_{j-1}(e,t)
\end{aligned}
$$

となり $\widetilde{H}_{j-1}$ と一致する.

これで, $\widetilde{H}_{j-1}$ は E'_j 上に拡張された. (Lem 4.3.12)

以上により, 求める $\widetilde{H}$ が $E'\times[0,1]$ 上に定義された.

問 4.3.11

この $\widetilde{H}$ は (Thm 4.3.7) の条件をみたす.

(∵)

$$
\begin{tikzcd}
E'\times[0,1] \arrow[r, "\widetilde{H}"] \arrow[d, "p'\times id"'] & E \arrow[d, "p"] \\
X\times[0,1] \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}
$$

が可換であることを見る.

$(p'(e), t) \in X_{j-1,j}$ のとき.

$H(p'(e), t) \in Y$.

一方, $(e, t) \in E'_{j-1,j}$ のとき.

$\widetilde{H_j}(e,t) = \varphi_\alpha^{-1}(H(p'(e),t), \overline{\varphi_\alpha}(\widetilde{H_{j-1}}(e, t_{j-1}(p'(e)))))$

$p \circ \widetilde{H_j}(e,t) = H(p'(e), t)$

よって、 $E' \times [0,1]$ 全体でも

$p \circ \widetilde{H} = H \circ (p' \times id)$

また、 $\widetilde{H}(e,0) = \widetilde{f_0}(e)$ は $\widetilde{H}$ の構成の仕方から分かる

□

この証明中に、次の補題を用いている.

Lem 4.3.12

位相空間 X の閉集合 A, B 上で定義されている連続写像

$$\begin{cases} f : A \to Y \\ g : B \to Y \end{cases}$$

が、 $f|_{A \cap B} = g|_{A \cap B}$ をみたすならば.

連続写像

$$h: A \cup B \longrightarrow Y$$

で、

$$h|_A = f, \quad h|_B = g$$

であるものが一意的に存在.

∵)

$$h: A \cup B \longrightarrow Y \quad を$$

$$\begin{cases} x \in A \text{ のとき} & h(x) = f(x) \\ x \in B \text{ のとき} & h(x) = g(x) \end{cases}$$

で定める. これが連続写像になっていることを示す.

任意に Y の閉集合 C をとり, $h^{-1}(C)$ が X で閉集合であることを示す.

$$\begin{aligned} h^{-1}(C) &= (h^{-1}(C) \cap A) \cup (h^{-1}(C) \cap B) \\ &= ((h|_A)^{-1}(C)) \cup ((h|_B)^{-1}(C)) \\ &= (f^{-1}(C)) \cup (g^{-1}(C)) \end{aligned}$$

f, g はともに連続なので, それぞれ A, B の閉集合. よって, X での閉集合なので, $h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$ も X で閉.

Def 4.3.14

(Lem 4.3.12) の写像 h を $f \cup g$ と表し、
f と g を 貼り合わせてできる写像 という。

ここまでの話を少し一般化する。

Def 4.3.15

位相空間 X の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が与えられたとする。
この被覆に従属する 1の分割 (partition of unity)
とは、連続函数の族
$$\{ f_\gamma : X \to [0,1] \}_{\gamma \in \Gamma}$$
で、次の条件をみたすもの。

(1) 各 $\gamma \in \Gamma$ に対し、
$$\mathrm{Supp}(f_\gamma) = \overline{\{ x \in X \mid f_\gamma(x) \neq 0 \}}$$

と定めると、$\{\mathrm{Supp}(f_\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$ は局所有限な
X の閉被覆となる。

つまり、$X = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathrm{Supp}(f_\gamma)$ であり、また、
$\forall x \in X$, $\exists U_x$: x の open nbd
s.t. U_x は有限個の $\mathrm{Supp}(f_\gamma)$ としか交わらない。

(2) $\forall x \in X, \quad \sum_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma(x) = 1.$

(3) $\forall \gamma \in \Gamma, \quad \exists \alpha \in A \quad \text{s.t.} \quad \mathrm{Supp}(f_\gamma) \subset U_\alpha.$

また、従属する1の分割を持つ被覆を、
numerable な被覆という。

Thm 4.3.16 (Dold)

$\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を、位相空間 B の numerable な被覆とし、

$$p : E \longrightarrow B$$

をファイバー束とする。各 U_α 上で p が自明ならば、
任意の位相空間 X に対し、(Thm 4.3.7) が成り立つ。

Cor 4.3.18 (Dold)(被覆ホモトピー定理)

$p : E \to B$; ファイバー束.

$\begin{cases} f : X \to B \\ \tilde{f} : X \to E \end{cases}$ を、連続写像で、

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

を可換にするもの、とする.

さらに、$H : X \times [0,1] \longrightarrow B$ を、

f から始まるホモトピー、つまり、$H(x,0) = f(x)$

となるもの、とする.

このとき、もし B が numerable な被覆を持つなら、

ホモトピー

$$\tilde{H} : X \times [0,1] \longrightarrow E$$

で、

$$\tilde{H}(x,0) = \tilde{f}(x)$$

かつ、次の図式を可換にするようなものが存在する.

$$
\begin{tikzcd}
 & E \arrow[d, "p"] \\
X \times [0,1] \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\exists \widetilde{H}"] & B
\end{tikzcd}
$$

$\|$

$$
\begin{tikzcd}
X \times \{0\} \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times [0,1] \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\exists \widetilde{H}"] & B
\end{tikzcd}
$$

Claim (問 4.3.19)

(Thm 4.3.16) と (Cor 4.3.18) は同値.

∵

[Thm 4.3.16 ⇒ Cor 4.3.18]

(Thm 4.3.16) で $E' \to X$ を $X \xrightarrow{=} X$ ととる.

[Cor 4.3.18 ⇒ Thm 4.3.16]

(Thm 4.3.16) の仮定の下で, 次の図式を考える.

$$
\begin{tikzcd}
 & & E \arrow[d, "p"] \\
E' \arrow[urr, "\tilde{f}"] \arrow[rr, "f \circ p'"] \arrow[dr, "p'"'] & \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & B \\
 & X \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & E \arrow[d, "p"] \\
E' \times [0,1] \arrow[urr, dashed, "\tilde{H}"] \arrow[rr, "H \circ (p' \times 1_{[0,1]})"] \arrow[dr, "p' \times 1_{[0,1]}"'] & & B \\
 & X \times [0,1] \arrow[ur, "H"'] &
\end{tikzcd}
$$

(Cor 4.3.18) より、右の図式を可換にする写像

$$\tilde{H} : E' \times [0,1] \longrightarrow E$$

で、 $\tilde{H}(e,0) = \tilde{f}_0(e)$ $(e \in E')$ をみたすもの が存在する。

この図式を描き直すと、

$$
\begin{tikzcd}
E' \times [0,1] \arrow[r, "\tilde{H}"] \arrow[d, "p' \times 1_{[0,1]}"'] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times [0,1] \arrow[r, "H"] & B
\end{tikzcd}
$$

つまり、(Thm 4.3.16) が成り立つ

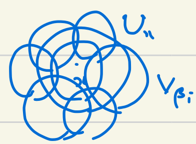
Def 4.3.20

位相空間 X が パラコンパクト (paracompact) であるとは、
X の任意の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が局所有限な細分を持つこと。つまり、

X の開被覆 $\{V_\beta\}_{\beta\in B}$ で次をみたすものが存在すること:

(i) $\forall \beta\in B,\ \exists \alpha\in A,$ s.t. $V_\beta \subset U_\alpha$.

(ii) $\forall x\in X,\ \exists U_x$: x の open nbd.
s.t.
U_x と交わる V_β が有限個しか存在しないものが存在する.



Thm 4.3.21

パラコンパクト Hausdorff 空間は、任意の開被覆に従属する 1の分割を持つ.

(Munkres Thm 41.7)

Cor 4.3.22

B : パラコンパクト Hausdorff 空間.
$p : E \longrightarrow B$; ファイバー束. とすると.
任意の位相空間 X に対し.
(Cor 4.3.18) (Thm 4.3.16) よって (Thm 4.3.17)
が成り立つ.

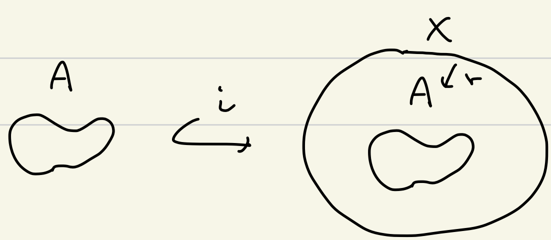
[追加の話題 + はじめの問いの解答]

Def 4.3.23

位相空間 X の部分空間 A は.
写像 $r : X \longrightarrow A$ で, 次の条件を
みたすものを持つとき. X の変位レトラクト とよばれる.
(deformation retract)

$$
\begin{cases}
(1) & r \circ i = 1_A \\
(2) & i \circ r \simeq 1_X
\end{cases}
$$

ただし. $i : A \hookrightarrow X$ は包含写像.



Cor 4.3.25

X : パラコンパクト Hausdorff 空間
$p : E \longrightarrow X$; ファイバー束
$A \subset X$: X の強変位レトラクト とすると、
束写像

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\tilde{r}"] \arrow[d, "p"'] & E|_A \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "r"'] & A \end{tikzcd}$$

が存在する。

㋑ $h : X \times [0,1] \longrightarrow X$ を、
1_X から $i \circ r$ へのホモトピー とする。

$$\begin{cases} h(x,0) = 1_X(x) = x \\ h(x,1) = (i \circ r)(x). \end{cases}$$

(Thm 4.3.7) より、 h のリフト

$$\begin{tikzcd} E \times [0,1] \arrow[r, "\tilde{h}"] \arrow[d, "p \times 1_{[0,1]}"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times [0,1] \arrow[r, "h"] & X \end{tikzcd}$$

が存在する。

$\tilde{r} = \tilde{h}|_{X\times\{1\}}$ とおくと、束写像

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\tilde{r}"] \arrow[d, "p"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "r"'] & X \end{tikzcd}$$

を得るが、 $\begin{cases} \tilde{r}(E) = E|_A = p^{-1}(A) \\ r(X) = A \end{cases}$ なので、

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\tilde{r}"] \arrow[d, "p"'] & E|_A \arrow[d, "p|_A"] \\ X \arrow[r, "r"'] & A \end{tikzcd}$$

を得る。 □

Cor 4.3.26

X：パラコンパクトHausdorff空間
$p : E \longrightarrow X \times [0,1]$；ファイバー束

ならば、X上のファイバー束 $p' : E' \to X$ が存在し、
$p : E \longrightarrow X \times [0,1]$

は、$p' \times 1_{[0,1]} : E' \times [0,1] \longrightarrow X \times [0,1]$
と同型になる。

(証)

$$i_0 : X = X \times \{0\} \hookrightarrow X \times [0,1]$$

を包含写像、$E' := i_0^*(E)$ とおく。

$$\begin{tikzcd}
E' = i_0^*(E) \arrow[r, "p^*(i_0)"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\
X = X \times \{0\} \arrow[r, hook, "i_0"] & X \times [0,1]
\end{tikzcd}$$

これにより、束写像

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[r] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "i_0"'] & X \times [0,1]
\end{tikzcd}$$

を得る。

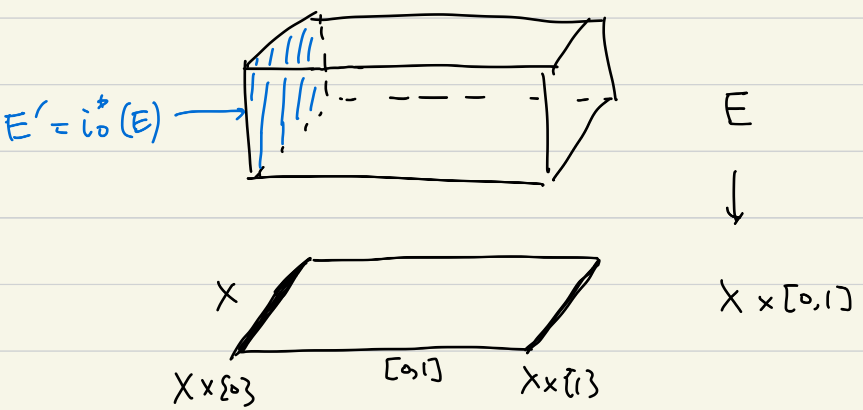
ここで、E' は E の部分空間であり、p' は p の制限。
"ホモトピー"

$$H = 1_{\times[0,1]} : X \times [0,1] \longrightarrow X \times [0,1]$$

を考える。 $H(x,0) = (x,0) = i_0(x)$ だから
(Thm 4.3.7) の仮定をみたし、束写像

$$\begin{array}{ccc} E' \times [0,1] & \xrightarrow{\tilde{H}} & E \\ {\scriptstyle p' \times 1_{[0,1]}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle p} \\ X \times [0,1] & \xrightarrow{H} & X \times [0,1] \end{array}$$

を得る。しかし、H は恒等写像なので、$\tilde{H}$ は束同型。 □



Thm 4.3.27

$p : E \longrightarrow Y$; ファイバー束.
$f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$; 連続写像で $f_0 \simeq f_1$

このとき. もし X がパラコンパクト Hausdorff 空間ならば.
プルバックで得られる 2つのファイバー束

$$\begin{cases} f_0^*(E) \longrightarrow X \\ f_1^*(E) \longrightarrow X \end{cases}$$

は 同型.

∵

$$H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$$; f_0 から f_1 へのホモトピー

とする.

E の H によるプルバック $H^*(E)$ は. $X \times [0,1]$ 上のファイバー束.
よって. (Cor 4.3.26) より. X 上のファイバー束 $E' \to X$ が存在し.
ファイバー束の同型

$$H^*(E) \cong E' \times [0,1]$$

を得る.

また, 各 $t \in [0,1]$ に対し.

$$i_t : X = X \times \{t\} \hookrightarrow X \times [0,1]$$

を包含写像とすると.

$(f\circ g)^*(E) = g^*(f^*(E))$

$$\begin{cases} f_0 = H\circ i_0 \\ f_1 = H\circ i_1 \end{cases}$$ なので、 (Lem 4.2.7) より

$$f_0^*(E) = (H\circ i_0)^*(E) = i_0^*(H^*(E)) \cong i_0^*(E'\times[0,1])$$
$$f_1^*(E) = (H\circ i_1)^*(E) = i_1^*(H^*(E)) \cong i_1^*(E'\times[0,1])$$

しかし、 $\forall t \in [0,1]$

$$\begin{tikzcd}
E' = E'\times\{t\} \arrow[r, hook] \arrow[d] & E'\times[0,1] \arrow[d] \\
X = X\times\{t\} \arrow[r, hook, "i_t"'] & X\times[0,1]
\end{tikzcd}$$

は束写像だから、 (Prop 4.2.6) より

$$E' \cong i_t^*(E'\times[0,1])$$

$\therefore$

$$f_0^*(E) \cong i_0^*(E'\times[0,1]) \cong E' \cong i_1^*(E'\times[0,1]) \cong f_1^*(E)$$

□