第4章　ファイバー束の分類

4.1　ファイバー束の間の写像

$$\xi = (F \to E \xrightarrow{p} B)$$
$$\xi' = (F' \to E' \xrightarrow{p'} B')$$

の2つがあったとき、ξ と ξ' の間の写像としては、

$$B \to B'$$
$$E \to E'$$
$$F \to F'$$

の3つの写像を考えることになりそう。
実は、底空間 B, B'、全空間 E, E' の間の写像だけ考えればよい。

Def 4.1.1

ファイバー束
$$\xi = (p : E \to B)$$
$$\xi' = (p' : E' \to B')$$
に対し、ξ から ξ' へのファイバーを保つ写像 (fiber-preserving map) とは、写像の組
$$\tilde{f} : E \to E'$$
$$f : B \to B'$$
で、図式
$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\tilde{f}} & E' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ B & \xrightarrow[f]{} & B' \end{array}$$
を可換にするもの、である。

このとき、まとめて
$$(\tilde{f}, f) : (E, B) \longrightarrow (E', B')$$
あるいは、
$$\mathfrak{f} := (\tilde{f}, f) : \xi \longrightarrow \xi'$$
などとかく。

問 4.1.2

fiber preserving map はファイバーを保つ、つまり
$\forall x \in B, \quad \tilde{f}(p^{-1}(x)) \subset p'^{-1}(f(x))$.

証

$$\tilde{f}(p^{-1}(x)) \subset p'^{-1}(f(x))$$

を示すので，

$$p'(\tilde{f}(p^{-1}(x))) = f(x)$$

であればよい.

図式の可換性から，

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "f"'] & B' \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} & p'(\tilde{f}(p^{-1}(x))) \\ = & f(p(p^{-1}(x))) \\ = & f(x). \end{aligned}$$

□

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(x) \arrow[r] \arrow[d, hook] & p'^{-1}(f(x)) \arrow[d, hook] \\ E \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "f"'] & B' \end{tikzcd}$$

(局所自明化, 構造群 との関係)

<u>Def 4.1.5</u>

$p : E \to B$

$p' : E' \to B'$

を, それぞれ F と F' をファイバーとするファイバー束とし,

$$\mathfrak{f} = (\tilde{f}, f) : (E, B) \to (E', B')$$

をファイバーを保つ写像とする.

各点 $x \in B$ について, x と $f(x)$ のまわりの局所自明化

$$\begin{cases} \varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F \\ \psi_\beta : p'^{-1}(V_\beta) \to V_\beta \times F' \end{cases}$$

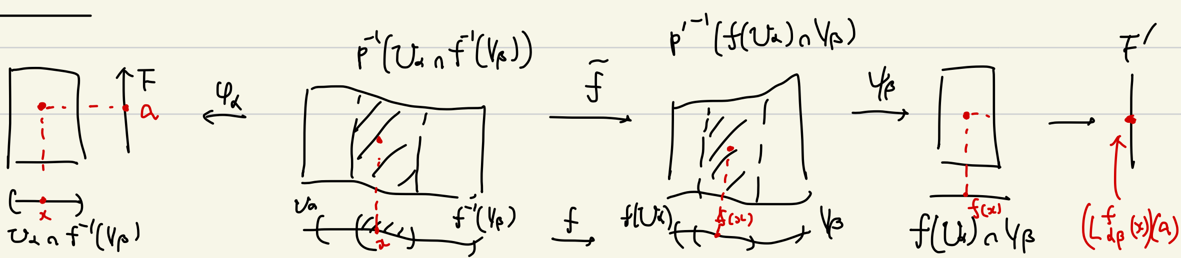
をとる. このとき, 合成,

$$(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)) \times F \xrightarrow{\varphi_\alpha^{-1}} p^{-1}(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)) \xrightarrow{\tilde{f}} p'^{-1}(f(U_\alpha) \cap V_\beta) \xrightarrow{\psi_\beta} (f(U_\alpha) \cap V_\beta) \times F' \xrightarrow{pr_2} F'$$

の随伴写像を,

$$L^f_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta) \longrightarrow Map(F, F')$$

と表す.



Def 4.1.7

$\xi = (p : E \to B)$ と

$\xi' = (p' : E' \to B')$ を,

同じファイバー F と同じ構造群 G を持つファイバー束とし,

G の F への作用も, 同じ写像

$$\mu_G : G \times F \longrightarrow F$$

で与えられているとする.

このとき, ξ から ξ' への束写像 (bundle map) とは,

ξ から ξ' へのファイバーを保つ写像であり,

$$L^f_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta) \longrightarrow \mathrm{Map}(F, F)$$

が構造群 G に値を持つ, つまり図式

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "ad(\mu_G)"] & & \mathrm{Map}(F,F) \\ & U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta) \arrow[ul, dashed, "\exists \bar{L}^f_{\alpha\beta}"] \arrow[ur, "L^f_{\alpha\beta}"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にする左斜め上向きの連続写像 $\bar{L}^f_{\alpha\beta}$ が存在するもの.

Rem 4.18

$\mathfrak{f} = (\tilde{f}, f)$ が ξ から ξ' への束写像ならば、

$$\tilde{f}|_{p^{-1}(x)} : p^{-1}(x) \longrightarrow p'^{-1}(f(x))$$

は同相写像.

$\because$

(注 3.5.22 (p.58)) より、F は局所コンパクト Hausdorff.
よって (Lem 3.4.7) (Lem 3.5.14) (Cor 3.5.19) より、

- $\mathrm{ad}(\mu_G) : G \longrightarrow \mathrm{Map}(F, F)$ は連続.
- $\mathrm{ad}^{-1}(\mu_G) : G \times F \to F$ は G の F への作用
- $\mathrm{ad}(\mu_G) : G \to \mathrm{Map}(F, F)$ の像は $\mathrm{Homeo}(F)$ に含まれる.

ゆえに、$\forall x \in U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)$, $L^f_{\alpha\beta}(x) \in \mathrm{Homeo}(F)$

$$F \cong \{x\} \times F \xrightarrow{\varphi_\alpha^{-1}} p^{-1}(x) \xrightarrow{\tilde{f}|_{p^{-1}(x)}} p'^{-1}(f(x)) \xrightarrow{\psi_\beta} \{x\} \times F \cong F$$

が $L^f_{\alpha\beta}(x)$ で、$L^f_{\alpha\beta}(x)$, φ_α, ψ_β が同相なので、
$\tilde{f}|_{p^{-1}(x)}$ も同相写像 $\square$

Prop 4.1.9

G: 位相群

$\xi = (p: E \to B)$,　$\xi' = (p': E' \to B')$

を 主G束 とする.

このとき、ファイバーを保つ写像

$$\mathfrak{f} = (\tilde{f}, f) : (E, B) \longrightarrow (E', B')$$

が束写像ならば、次の図式は可換.

$$\begin{tikzcd}
E \times G \arrow[r, "\tilde{f} \times \mathrm{id}_G"] \arrow[d] & E' \times G \arrow[d] \\
E \arrow[r, "\tilde{f}"'] & E'
\end{tikzcd}$$

(つまり、束写像とGの作用は可換).

∵

$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, $\{V_\mu\}_{\mu \in M}$ を、それぞれ B, B' の開被覆で

局所自明化写像

$$\begin{cases} \varphi_\lambda : p^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times F \\ \psi_\mu : p'^{-1}(V_\mu) \longrightarrow V_\mu \times F \end{cases}$$

を持つものとする.　($p^{-1}(x) \cong p'^{-1}(f(x))$ for all $x \in B$

なので、そのファイバーを F と表している)

構造群 G の，全空間 E への作用の定義より，図式

$$\begin{tikzcd}
E \times G \arrow[d] & p^{-1}(U_\lambda) \times G \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\varphi_\lambda \times id_G"] \arrow[d] & U_\lambda \times G \times G \arrow[d, "id_{U_\lambda} \times \mu_G"] \\
E & p^{-1}(U_\lambda) \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\varphi_\lambda"] & U_\lambda \times G
\end{tikzcd}$$

は可換となる．E' についても同様．よって，

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(U_\lambda \cap f^{-1}(V_\mu)) \times G^{\subset E \times G} \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr] \arrow[dd] & & (U_\lambda \cap f^{-1}(V_\mu)) \times G \times G \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& p^{-1}(U_\lambda \cap f^{-1}(V_\mu))^{\subset E} \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dd] & & (U_\lambda \cap f^{-1}(V_\mu)) \times G \arrow[dd] \\
p'^{-1}(f(U_\lambda) \cap V_\mu) \times G_{\subset E' \times G} \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr] & & (f(U_\lambda) \cap V_\mu) \times G \times G \arrow[dr] & \\
& p'^{-1}(f(U_\lambda) \cap V_\mu)^{\subset E'} \arrow[rr, "\sim"] & & (f(U_\lambda) \cap V_\mu) \times G
\end{tikzcd}$$

のうち，上の四角と底面の四角が可換となる．

その他の四角も可換となり，特に，左側の四角を

貼り合わせて，
$$\begin{tikzcd}
E \times G \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & E' \times G \arrow[d] \\
E \arrow[r] & E'
\end{tikzcd}$$
を得る．

$\square$

Def 4.1.11

G: 位相群

X と Y に, 右から G が作用している. とする.

連続写像 $f: X \to Y$ が

G-同変 (G-equivariant) であるとは, 図式

$$
\begin{tikzcd}
X \times G \arrow[r, "1_G \times f"] \arrow[d] & Y \times G \arrow[d] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}
$$

が可換になること.

目的は, 底空間 B 上のファイバー束が "どれくらい" あるか 調べることだったので,

ファイバー束 の 同型 を 定義する.

Def 4.1.12

$\xi = (p : E \to B)$

$\xi' = (p' : E' \to B')$ を.

同じファイバー F, 同じ構造群 G, 同じ底空間 B

を持つファイバー束とする.

もし, 束写像

$$\mathfrak{f} = (\tilde{f}, f) : (E, B) \longrightarrow (E', B')$$

で,

$f = id_B$ であるもの, が存在するなら,

ξ と ξ' は 同型 (isomorphism) あるいは 同値 (equivalent)

であるといい, $\mathfrak{f}$ を 束同型写像 (bundle isomorphism)

という. このとき, $\xi \cong \xi'$ とかく.

Prop 4.1.13

ファイバー束の間の関係 $\cong$ は同値関係.

∵

確かめるべきは次の3条件 :

$$\begin{cases} (\text{反射律}) & \forall \xi, \quad \xi \cong \xi \\ (\text{対称律}) & \xi \cong \eta \Rightarrow \eta \cong \xi \\ (\text{推移律}) & \xi \cong \zeta \text{ かつ } \zeta \cong \eta \Rightarrow \xi \cong \eta. \end{cases}$$

ここでは 対称律だけ確かめる.

【対称律】

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "="', "f"' below] & B \end{tikzcd}$$

を，$\xi = (p : E \to B)$ ，$\eta = (p' : E' \to B)$ の同型 とする.

このとき，同型

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "="', "g"' below] & B \end{tikzcd}$$

を構成したい.

自然なアイデアは $\tilde{g} = \tilde{f}^{-1}$ である.

$\tilde{f}$ は各ファイバー上で同相なので全単射.

よって連続性を無視すれば $\tilde{f}^{-1}$ は存在し，図式を可換にする.

よって $\tilde{f}^{-1}$ の連続を示せばOK.

$B = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ を、Bの開被覆で、各U_α上でξ, ηが局所自明化写像を持つとする。

$$\varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times F$$
$$\psi_\alpha : p'^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times F$$

をU_α上の局所自明化とする。

$E' = \bigcup_{\alpha \in A} p'^{-1}(U_\alpha)$ が開被覆なので、

(Lem 3.7.10) より、各$p'^{-1}(U_\alpha)$上で$\tilde{f}^{-1}$が連続であることを示せばよい。

仮定より、合成

$$U_\alpha \times F \xrightarrow{\varphi_\alpha^{-1}} p^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\tilde{f}} p'^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\psi_\alpha} U_\alpha \times F$$

は、$\psi_\alpha \circ \tilde{f} \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, y) = (x, \Phi(x)(y))$ として、連続写像

$$\Phi : U_\alpha \longrightarrow \mathrm{Homeo}(F)$$

を定める。(Rem 4.1.8 も参照)

各点$x \in U_\alpha$に対して$\Psi(x) = \Phi(x)^{-1}$とおく。

ここで. $\Phi(x)^{-1}$ は $\Phi(x)$ の $\mathrm{Homeo}(F)$ の元としての逆元.
つまり 逆写像.　　すると. Ψ は. 合成.

$$\Psi : U_\alpha \xrightarrow{\Phi} G \xrightarrow{\nu} G$$

$$\left(\begin{array}{ccc} \cap & & \cap \\ \mathrm{Homeo}(F) & \to & \mathrm{Homeo}(F) \end{array} \right)$$

で与えられるので連続　(νは逆元をとる写像).
この Ψ を用いて.

$$g_\alpha : U_\alpha \times F \to U_\alpha \times F$$

を

$$g_\alpha(x, y) = (x, \Psi(x)(y))$$

と定義するとこれは連続で.

$$\psi_\alpha \circ \tilde{f} \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, y) = (x, \Phi(x)(y))$$

で与えられる写像の逆.　　よって. 図式.

$$\begin{array}{ccc} p'^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\psi_\alpha} & U_\alpha \times F \\ \tilde{f}^{-1} \downarrow & & \downarrow g_\alpha \\ p^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & U_\alpha \times F \end{array}$$

は可換となり. $\tilde{f}^{-1}$ は連続.

$\tilde{f}^{-1}$ が束写像になっていることを示す。

問 4.1.5

$(\tilde{f}, 1_B) : (E, B) \longrightarrow (E', B)$

が束同型ならば、

$(\tilde{f}^{-1}, 1_B) : (E', B) \longrightarrow (E, B)$

も束写像。

∵

$\tilde{f}$ はファイバーを保つ写像であり、(Rem 4.1.8) より、

各ファイバー間の写像は同相写像。

よって、$\tilde{f}^{-1}$ (これまでの議論により連続) も、

ファイバーを保ち、各ファイバー上で同相写像になる。

(Def 4.1.7) の構造群に関する条件を調べる。

$\mathfrak{f} = (\tilde{f}, 1_B)$ に対して、次の可換図式

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "\mathrm{ad}(\mu_G)"] & & \mathrm{Homeo}(F) \\
& U_\alpha \cap V_\beta \arrow[ul, dashed, "\exists \bar{L}^{\mathfrak{f}}_{\alpha\beta}"] \arrow[ur, "L^{\mathfrak{f}}_{\alpha\beta}"'] &
\end{tikzcd}$$

が存在する。(Def 4.1.7)

$\mathfrak{f}^{-1} = (\tilde{f}^{-1}, 1_B)$ の定めから、$L^{\mathfrak{f}^{-1}}_{\alpha\beta} = \nu \circ L^{\mathfrak{f}}_{\beta\alpha}$

となるので、$\bar{L}^{\mathfrak{f}^{-1}}_{\alpha\beta} := \nu \circ \bar{L}^{\mathfrak{f}}_{\beta\alpha}$ とおくことで、

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr] & \circlearrowleft & \mathrm{Homeo}(F) \\
& V_\alpha \cap U_\beta \arrow[ul, "\bar{L}^{\mathfrak{f}^{-1}}_{\alpha\beta}"] \arrow[ur, "L^{\mathfrak{f}^{-1}}_{\alpha\beta}"'] &
\end{tikzcd}$$

を得る。つまり $\mathfrak{f}^{-1}$ は束写像

□

Cor 4.1.16

$(\tilde{f}, 1_B) : (E, B) \to (E', B)$

が 束同型 ならば、

$\tilde{f} : E \to E'$

は 同相写像.

(∵) (Prop 4.1.13) の 証明により $\hat{f}$ は 全単射連続 で、
$\tilde{f}^{-1}$ が 存在し、$\tilde{f}^{-1}$ も 連続. □

ファイバー束 が 同型になる条件を、局所自明化写像を使って書いてみる. (これにより 主G束の 同型類を $H^1(B, \underline{G})$ で表せる)

Prop 4.1.22

$E \xrightarrow{p} B$, $E' \xrightarrow{p'} B$ を 同じファイバー F, 同じ構造群 G を持ち、G の F への 作用も 同じ であるファイバー束 とする.

$\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を、B の 開被覆 で、各 U_α 上で、
E と E' の 局所自明化が 与えられているものとし、

$$\{ \Phi^{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G \}$$
$$\{ \Psi^{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G \}$$

を、それぞれ E, E' の 座標変換 とする.

このとき、E と E' が同型になるための必要十分条件は、
各 $\alpha \in A$ に対し、連続写像

$$\lambda_\alpha : U_\alpha \to G$$

で、

$$\forall \alpha, \beta \in A, \quad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$$

$$\exists \lambda_\alpha : U_\alpha \to G, \ \exists \lambda_\beta : U_\beta \to G$$

s.t.

$$\lambda_\beta^{-1}(x)\, \Psi^{\alpha\beta}(x)\, \lambda_\alpha(x) = \Phi^{\alpha\beta}(x)$$

となるものが存在すること。

∵ [⇒]

E, E' の局所自明化を、それぞれ

$$\varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F$$

$$\psi_\alpha : p'^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F$$

とし、$\tilde{f} : E \to E'$ を、ファイバー束の同型を与える写像とする。

$x \in U_\alpha \cap U_\beta$, $y \in F$ に対し、

$$\psi_\beta \tilde{f} \varphi_\alpha^{-1}(x, y) = (x, \lambda_{\alpha\beta}(x)(y))$$

となる $\lambda_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Homeo}(F)$ が存在するが、
束写像の定義より

$$\lambda_{\alpha\beta} = ad(\mu_G) \circ \bar{\lambda}_{\alpha\beta}$$

となる連続写像 $\bar{\lambda}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ が存在。

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "ad(\mu)"] & & \mathrm{Homeo}(F) \\
& U_\alpha \cap U_\beta \arrow[ul, dashed, "\exists \bar{\lambda}_{\alpha\beta}"] \arrow[ur, "\lambda_{\alpha\beta}"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowright"] &
\end{tikzcd}$$

そこで、$\lambda_\alpha := \bar{\lambda}_{\alpha\alpha}$ とおく。このとき、図式、

$$\begin{tikzcd}
(x, y) & & & \\
(U_\alpha \cap U_\beta) \times F \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] \arrow[dd, "id \times \Phi^{\alpha\beta}(x)"'] & & & (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \arrow[dd, "id \times \Psi^{\alpha\beta}(x)"] \\
& p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \arrow[ul, "\varphi_\alpha"'] \arrow[dl, "\varphi_\beta"] \arrow[r, "\tilde{f}"] & p'^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \arrow[ur, "\psi_\beta"] \arrow[dr, "\psi_\alpha"'] & \\
(U_\alpha \cap U_\beta) \times F & & & (U_\alpha \cap U_\beta) \times F
\end{tikzcd}$$

で、左上から φ_α^{-1} で $p'^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ へ行き、

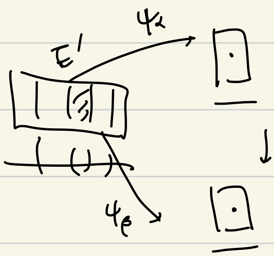
ψ_α で 右下の $(U_\alpha \cap U_\beta) \times F$ へ行って、

ψ_α^{-1} で 戻ってから ψ_β で 右上へ行くと、

$$\psi_\beta \circ \tilde{f} \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, y) = \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\alpha \circ \tilde{f} \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, y)$$

$$= \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}\left(x, \lambda_\alpha(x)(y)\right)$$

$$= \left(x, \Psi^{\alpha\beta}(x)\left(\lambda_\alpha(x)(y)\right)\right)$$



一方、今度は左下を経由すると、

$$\psi_\beta \circ \tilde{f} \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, y) = \psi_\beta \circ \tilde{f} \circ \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, y)$$

$$= \psi_\beta \circ \tilde{f} \circ \varphi_\beta^{-1}\left(x, \Phi^{\alpha\beta}(x)(y)\right)$$

$$= \left(x, \lambda_\beta(x)\left(\Phi^{\alpha\beta}(x)(y)\right)\right)$$

$$\therefore \quad \lambda_\beta(x)\, \Phi^{\alpha\beta}(x) = \Psi^{\alpha\beta}(x)\, \lambda_\alpha(x)$$

$$\therefore \quad \Phi^{\alpha\beta}(x) = \lambda_\beta(x)^{-1}\, \Psi^{\alpha\beta}(x)\, \lambda_\alpha(x)$$

[⇐] 逆に、このような $\lambda_\alpha : U_\alpha \to G$ が与えられているとする。

写像 $f_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to p'^{-1}(U_\alpha)$

を、次の合成で定義する。

$$p^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\varphi_\alpha} U_\alpha \times F \xrightarrow{\Lambda_\alpha} U_\alpha \times F \xrightarrow{\psi_\alpha^{-1}} p'^{-1}(U_\alpha)$$

ここで、$\Lambda_\alpha(x, y) = (x, \lambda_\alpha(x)(y))$

$x \in p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ に対しては、2通りの定義がありうるが、

$\lambda_\beta(x)\ \Phi^{\alpha\beta}(x) = \Phi^{\alpha\beta}(x)\ \lambda_\alpha(x)$

より、それらは一致 (*)。

よって、(Lem 3.7.(0)) より、束写像

$\tilde{f} : E \to E'$

を得る。

(*) について：

$$\begin{tikzcd}
 & (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \arrow[r, "\Lambda_\alpha"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \arrow[d] \arrow[dr, "\psi_\alpha^{-1}"] & \\
p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \arrow[ur, "\varphi_\alpha"] \arrow[dr, "\varphi_\beta^{-1}"'] & & & p'^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \\
 & (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \arrow[r, "\Lambda_\beta"'] & (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \arrow[ur, "\psi_\beta^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

上の図式より、 $e \in p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ に対して、

$$\varphi_\alpha^{-1} \circ \Lambda_\alpha \circ \varphi_\alpha(e)$$

$$= \varphi_\beta^{-1} \circ \underline{\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ \Lambda_\alpha} \circ \varphi_\alpha(e)$$

$$= \varphi_\beta^{-1} \circ \underline{\Lambda_\beta \circ (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})} \circ \varphi_\alpha(e)$$

$$= \varphi_\beta^{-1} \circ \Lambda_\beta \circ \varphi_\beta(e)$$

$$\therefore \quad \varphi_\alpha^{-1} \circ \Lambda_\alpha \circ \varphi_\alpha = \varphi_\beta^{-1} \circ \Lambda_\beta \circ \varphi_\beta$$

$\square$