§3.7 主束

G : 位相群

H : G の部分群

射影 $p: G \longrightarrow G/H$ が局所切断を持つと仮定.

このとき、(Thm 3.6.48) より、射影 $p: G \longrightarrow G/H$ は

H をファイバーとするファイバー束.

Q. このファイバー束の構造群は?

ファイバー束 $p: G \longrightarrow G/H$ の局所自明化

$$\varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times H$$

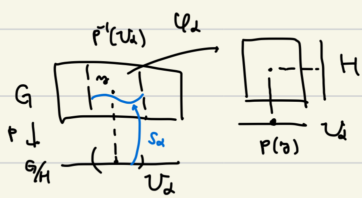
は、

$$x \in U_\alpha, \quad h \in H, \quad g \in p^{-1}(U_\alpha) \ (\subset G)$$

に対し、

$$\varphi_\alpha(g) = \left(p(g), \ s_\alpha(p(g))^{-1} g \right)$$

で与えられる.



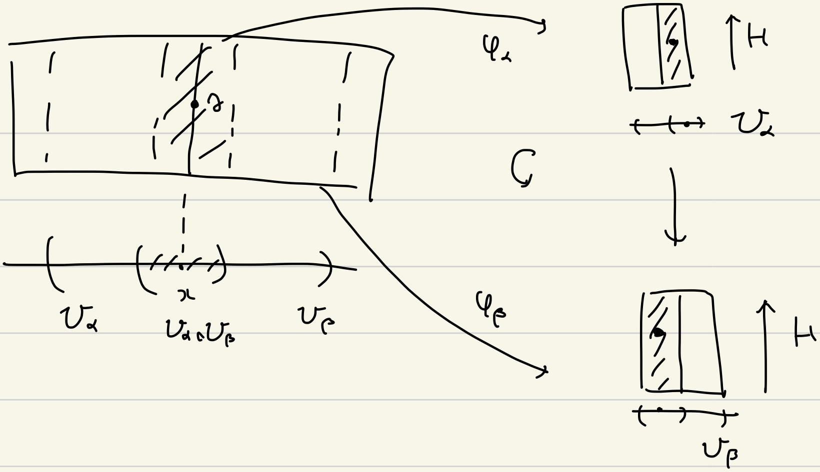
その逆写像は、

$$\varphi_\alpha^{-1}(x, h) = s_\alpha(x) h$$

ここで、$U_\alpha \subset G/H$ 上の局所切断

$$s_\alpha : U_\alpha \to p^{-1}(U_\alpha)$$

を用いた.



よって、U_β を、$U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ なる開集合で、
その上で局所切断 s_β を持つものとし、
s_β で定義される局所自明化を φ_β とすると、

$$
\begin{aligned}
\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, h) &= \varphi_\beta(s_\alpha(x)h) \\
&= \left(p(s_\alpha(x)h),\ s_\beta\left(p(s_\alpha(x)h)\right)^{-1} s_\alpha(x)h\right) \\
&= \left(x,\ s_\beta(x)^{-1} s_\alpha(x)h\right)
\end{aligned}
$$

$$\left(p(s_\alpha(x)h) = s_\alpha(x)hH = s_\alpha(x)H = p(s_\alpha(x)) = x\right)$$

よって、$U_\alpha \cap U_\beta$ での座標変換は

$$
\begin{aligned}
\Phi^{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta &\longrightarrow \mathrm{Homeo}(H) \\
x &\longmapsto \Phi^{\alpha\beta}(x)
\end{aligned}
$$

$$\left\{ \Phi^{\alpha\beta}(x) : H \to H \ ;\ h \mapsto s_\beta(x)^{-1} s_\alpha(x) h \right\}$$

で与えられる。

そこで，H の積 μ_H の随伴

$$
\begin{array}{rccccc}
\mathrm{ad}(\mu_H) : & H & \longrightarrow & \mathrm{Homeo}(H) & & \mu_H(h, h') \\
& \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$=$} \\
& h & \longmapsto & \{\mathrm{ad}(\mu_H)(h) : h' \longmapsto & & h.h'\}
\end{array}
$$

と、

$$
\begin{array}{rccc}
\Phi^{\alpha\beta} : & U_\alpha \cap U_\beta & \longrightarrow & H \\
& \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
& x & \longmapsto & s_\beta(x)^{-1} s_\alpha(x)
\end{array}
$$

と定義される写像を用いると，

$$
\begin{tikzcd}
s_\beta(x)^{-1} s_\alpha(x) \in H \arrow[rr, "\mathrm{ad}(\mu_H)"] & & \mathrm{Homeo}(H) \ni \mathrm{ad}(\mu_H)(s_\beta(x)^{-1} s_\alpha(x)), \ \Phi^{\alpha\beta}(x) \\
& U_\alpha \cap U_\beta \ni x \arrow[ul, "\Phi^{\alpha\beta}"] \arrow[ur, "\Phi^{\alpha\beta}"'] &
\end{tikzcd}
$$

は可換となる．

$$
\left(
\begin{aligned}
\because\ & \mathrm{ad}(\mu_H)(s_\beta(x)^{-1} s_\alpha(x))(h) \\
&= s_\beta(x)^{-1} s_\alpha(x)\, h \\
&= \Phi^{\alpha\beta}(x)(h) \qquad \text{for all } h \in H.
\end{aligned}
\right)
$$

まとめると.

Thm 3.7.1

G : 位相群.
H : G の部分群.
射影 $p: G \longrightarrow G/H$ が局所自明化を持つとする.
このとき. ファイバー束
$$G \longrightarrow G/H$$
は. 構造群 H もファイバーもともに H であり.
構造群のファイバーへの作用は H の積
$$\mu_H : H \times H \longrightarrow H$$
で与えられる.

一般化する.

Def 3.7.2

G: 位相群とする.
ファイバー束 $p: E \to B$ で. ファイバーと構造群が.
ともに G であり.
構造群のファイバーへの作用が G の積で
与えられているとき. これを主 G 束 (principle G bundle)
という.

Cor 3.7.3

G：位相群
H：Gの部分群　で，
$p : G \to G/H$ が局所自明化を持てば，
これは主H束になる．

Cor 3.7.4

射影 $O(n) \to O(n)/O(n-1)$ と
同相 $O(n)/O(n-1) \cong S^{n-1}$ との
合成により得られる写像

$$O(n) \to S^{n-1}$$

は主$O(n-1)$束である．

Ex 3.7.5

Hopf束 $p : S^3 \to S^2$ は主S^1束．

同じ底空間を持つ主G束と
構造群がGのファイバー束の間の関係を調べる.

[Thm 3.5.32] の構成を参考にすると,

[ファイバー束]

構造群 G, ファイバー F のファイバー束 $p: E \to B$ は,
以下のデータで決まる:

(1) Bの開被覆. $\{U_\alpha\}$

(2) $\Phi^{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$

(3) GのFへの作用, つまり連続な準同型.

$$G \longrightarrow \mathrm{Homeo}(F)$$

[主G束]

主G束 $p: P \to B$ は以下のデータで決まる:

(1) Bの開被覆. $\{U_\alpha\}$

(2) $\Phi^{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$

Fact 3.7.7

G：位相群.

G の空間 F への作用を1つ固定する.

$$(G \to \mathrm{Homeo}(F))$$

また、空間 B の開被覆 $\{U_\alpha\}$ と

写像の族 $\Phi = \{\Phi^{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G\}$

が与えられているとする. (データ (1)(2))

もし、 G の F への作用を表す写像

$$G \to \mathrm{Homeo}(F)$$

が単射なら、上の構成により

次の1対1対応がある：

$\{ \Phi$ を座標変換に持つ B 上の主 G 束$\}$

$$\longleftrightarrow$$

$\{$ファイバーが F で、構造群が G、

Φ を座標変換に持つ B 上のファイバー束$\}$

Rem

この対応は、まだ曖昧な述べ方になっている.

「$\leftarrow$ → 」の対応は具体的に与えられる．
そのために，まず，主G束の全空間Pへの Gの作用を定義する．

Def 3.7.8

$p : P \to B$: 主G束，
Gの右からの作用 $P \times G \longrightarrow P$ を，
局所自明化を用いて，次のように定める：

$$\{ \varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G \}_{\alpha \in A}$$

を局所自明化とする．
$x \in P$，$g \in G$ に対し，$x \in p^{-1}(U_\alpha)$ のとき，

$$\varphi_\alpha(x) = (p(x), \overline{\varphi_\alpha}(x)), \quad \overline{\varphi_\alpha}(x) \in G$$

と書き，

$$\begin{aligned} x.g &= \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(x)g) \\ &= \varphi_\alpha^{-1}(p(x), \overline{\varphi_\alpha}(x)g) \end{aligned}$$

で，g の x への作用を定義する．
つまり，作用

$$p^{-1}(U_\alpha) \times G \to p^{-1}(U_\alpha)$$

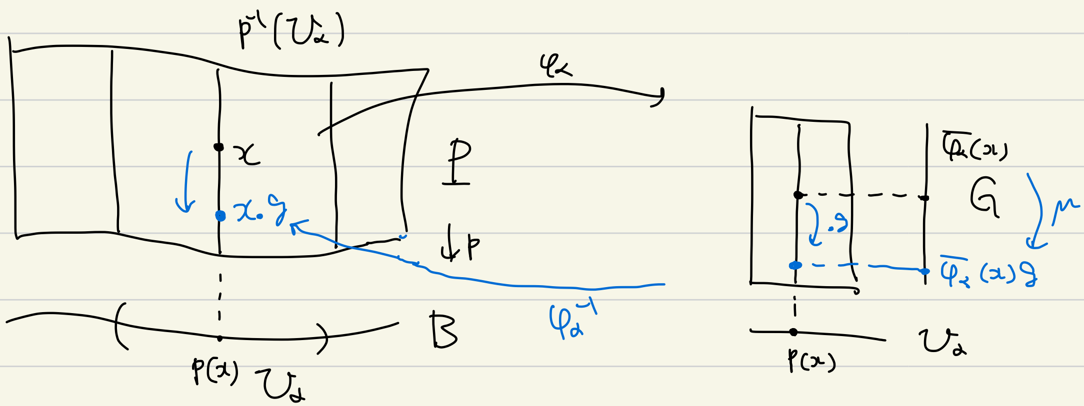
は，合成．

$$
\begin{aligned}
p^{-1}(U_\alpha)\times G &\xrightarrow{\varphi_\alpha\times 1_G} (U_\alpha\times G)\times G \\
&= U_\alpha\times(G\times G) \\
&\xrightarrow{1\times\mu} U_\alpha\times G \\
&\xrightarrow{\varphi_\alpha^{-1}} p^{-1}(U_\alpha)
\end{aligned}
$$

で与えられる.

$$P=\bigcup_{\alpha\in A} p^{-1}(U_\alpha)$$

なので, これで $P\times G\to P$ が定まる.



Lem 3.7.9

(Def 3.7.8) は well-defined. つまり,
$x \in p^{-1}(U_\alpha) \cap p^{-1}(U_\beta)$ のとき,
φ_α と φ_β を用いた 2 通りの $x.g$ の定義 は
一致する.

∵

$x \in p^{-1}(U_\alpha) \cap p^{-1}(U_\beta)$, $g \in G$ とする.

φ_α, φ_β を, それぞれ U_α, U_β 上の局所自明化とし,

$$\varphi_\alpha(x) = (p(x), \overline{\varphi_\alpha}(x))$$

と表す.

上の定義より,

- $p^{-1}(U_\alpha)$ 上では
$$x.g = \varphi_\alpha^{-1}(p(x), \overline{\varphi_\alpha}(x)g)$$
- $p^{-1}(U_\beta)$ 上では
$$x.g = \varphi_\beta^{-1}(p(x), \overline{\varphi_\beta}(x)g)$$

よって,
$$\varphi_\alpha^{-1}(p(x), \overline{\varphi_\alpha}(x), g) = \varphi_\beta^{-1}(p(x), \overline{\varphi_\beta}(x)g)$$

つまり,

$$\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}(p(x), \overline{\varphi_\alpha}(x)g) = \varphi_\beta(x.g)$$
$$= (p(x), \overline{\varphi_\beta}(x)g)$$

を示せば良い.

$\Phi^{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$

を座標変換とするとき、定義より

$(g, h) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times G$ に対し、

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(g, h) = (g, \Phi^{\alpha\beta}(g)\, h)$$

$$\therefore \quad \varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}(p(x), \overline{\varphi}_\alpha(x) g) = (p(x), \Phi^{\alpha\beta}(p(g))\, \overline{\varphi}_\alpha(x) g)$$

よって、 $\overline{\varphi}_\beta(x) = \Phi^{\alpha\beta}(p(g))\, \overline{\varphi}_\alpha(x)$ を示せばよい。

$$\begin{aligned}
\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}(p(x), \overline{\varphi}_\alpha(x)) &= \varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(x)) \\
&= \varphi_\beta(x) \\
&= (p(x), \overline{\varphi}_\beta(x)) \quad \text{— ①}
\end{aligned}$$

$$\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}(p(x), \overline{\varphi}_\alpha(x)) = (p(x), \Phi^{\alpha\beta}(p(x))\, \overline{\varphi}_\alpha(x)) \quad \text{— ②}$$

を比べて、 $\overline{\varphi}_\beta(x) = \Phi^{\alpha\beta}(p(x))\, \overline{\varphi}_\alpha(x)$ を得る

□

Lem 3.7.10

位相空間 X から Y への写像 $f : X \to Y$ を考える。
X の開被覆 $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ で、f の各 U_α への制限
$f|_{U_\alpha}$ が連続であるものが存在するなら、
f は X 全体で連続。

(問 3.7.11)

∵ $f|_{U_\alpha} : U_\alpha \to Y$ が連続なので、
任意の Y の閉集合 $U \subset Y$ について、

$$(f|_{U_\alpha})^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap U_\alpha$$

が U_α の閉集合. 閉集合の閉集合は閉集合なので、
X の閉集合でもある.

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} (f^{-1}(U) \cap U_\alpha)$$

で、(右辺) は閉集合の和集合なので (X の) 閉集合.
∴ f は X 全体で連続 □

(Def 3.7.8) の G の右からの P への作用は、
各開集合 $p^{-1}(U_\alpha)$ 上で連続. なぜなら、

$$p^{-1}(U_\alpha) \times G \to p^{-1}(U_\alpha)$$

は、連続写像.

$$p^{-1}(U_\alpha) \times G \xrightarrow[\varphi_\alpha \times 1_G]{} (U_\alpha \times G) \times G = U_\alpha \times (G \times G)$$

$$\xrightarrow[1_{U_\alpha} \times \mu]{} U_\alpha \times G$$

$$\xrightarrow[\varphi_\alpha^{-1}]{} p^{-1}(U_\alpha)$$

の合成なので連続. ゆえに、(lem 3.7.10) で、P 全体で
連続.

P の G から P/G についても考えてみよう.

Thm 3.7.13

$p: P \to B$ を 主 G 束 とすると.
p は 同相写像
$$\bar{p} : P/G \xrightarrow{\sim} B$$
を 誘導する.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "p"] & \\ P/G \arrow[r, "\bar{p}"'] & B \end{tikzcd}$$

また, 図式

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "="] \arrow[d, "\pi"'] & P \arrow[d, "p"] \\ P/G \arrow[r, "\bar{p}"] & B \end{tikzcd}$$

は可換となり 射影 $\pi : P \to P/G$ は, ファイバー束の射影 $p: P \to B$ と 同一視される.

∵ 写像 $\quad \bar{p} : P/G \longrightarrow B$ を定義する.

$$\begin{array}{ccc} P/G & \longrightarrow & B \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ [x] & \longmapsto & p(x) \end{array}$$

ここで, $[x]$ は $x \in P$ の P/G における同値類.
これが定理の条件をみたす同相写像であることを示すためには, 次のことを確かめる必要がある.

- (i) $\bar{p}$ が well-defined
- (ii) $\bar{p}$ が連続
- (iii) $\bar{p}$ が全単射
- (iv) $\bar{p}$ が開写像
- (v) $\bar{p}$ が図式を可換にする.

(i) $\bar{p}$ が well-defined (v) 図式の可換性

$[x] = [y]$, つまり,

$$\exists g \in G \quad \text{s.t.} \quad x = g.y \quad (\in P)$$

とする.

$p(y)$ の近傍 U_α での局所自明化を,

$$\begin{array}{cccc} \varphi_\alpha = p \times \overline{\varphi_\alpha} : & p^{-1}(U_\alpha) & \longrightarrow & U_\alpha \times G \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & (p(x), \overline{\varphi_\alpha}(x)) \end{array}$$

$y.g$ の定義より

$$y.g = \varphi_\alpha^{-1}(p(y), \overline{\varphi_\alpha}(y)g)$$

また、局所自明化写像の定義より

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_\alpha) \arrow[dr, "p"'] & & U_\alpha \times G \arrow[ll, "\varphi_\alpha^{-1}"'] \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U_\alpha & \end{tikzcd}$$

は可換。よって、

$$\begin{aligned} p(x) = p(y.g) &= p \circ (\varphi_\alpha^{-1}(p(y), \overline{\varphi_\alpha}(y)g)) \\ &= (p \circ \varphi_\alpha^{-1})(p(y), \overline{\varphi_\alpha}(y)g) \\ &= pr_1(p(y), \overline{\varphi_\alpha}(y)g) \\ &= p(y). \end{aligned}$$

よって、$\overline{p}$ は well-defined.

また、$\overline{p}$ は、図式

$$\begin{tikzcd} x \in & P \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "p"] & \\ {[x]} \in & P/G \arrow[r, "\overline{p}"'] & B \end{tikzcd}$$

を可換にする。$\overline{p}([x]) := p(x)$ より分かる。

(ii) $\bar{p}$ の連続性

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "p"] & \\ P/G \arrow[r, "\bar{p}"'] & B \end{tikzcd}$$

の可換性と (Lem 3.6.14) より p が連続なので $\bar{p}$ も連続。

(iii) $\bar{p}$ の全単射性

p が全射なので、図式の可換性から $\bar{p}$ も全射.

$x, y \in P$ をとり、$\bar{p}([x]) = \bar{p}([y])$ と仮定.

つまり $p(x) = p(y)$ とする.

$b = p(x) = p(y)$ $(\in B)$ とおき、

b の近傍での局所自明化

$$\varphi_\alpha = p \times \bar{\varphi}_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G$$

をとる.

$$g = \bar{\varphi}_\alpha(y)^{-1}\,\bar{\varphi}_\alpha(x) \quad \text{とおけば、}$$

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(y \cdot g) &= (p(y \cdot g), \bar{\varphi}_\alpha(y \cdot g)) \\ &= (p(y), \bar{\varphi}_\alpha(y) g) \\ &= (b, \bar{\varphi}_\alpha(x)) \\ &= \varphi_\alpha(x) \end{aligned}$$

φ_α は同相なので、$x = y \cdot g$ $\quad \therefore [x] = [y]$.

(iv) $\bar{p}$ が開写像であること.

(問3.7.14) により, p は等化写像

$$
\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[r, phantom, "\subset"] & P \arrow[d, "\pi"'] \arrow[drr, "p"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & & & \\
U \arrow[r, phantom, "\subset"] & P/G \arrow[rr, "\bar{p}"'] & & B \arrow[r, phantom, "\supset"] & \bar{p}(U)
\end{tikzcd}
$$

$\forall U \subset P/G$: 開集合 をとる.

定義より $\pi^{-1}(U)$ が P の開集合.

可換性で示せる.

$p^{-1}(\bar{p}(U)) = \pi^{-1}(U)$ であり,

p が等化写像なので, $\bar{p}(U)$ は B の開集合.

ゆえに, $\bar{p}$ は開写像.

□

問 3.7.14

任意のファイバー束

$$p : E \to B$$

に対し, p は等化写像.

(証)

$B = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ を, 局所自明化 $\varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \simeq U_\alpha \times F$

を持つ B の開被覆とする.

$$p^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow[\sim]{\varphi_\alpha} U_\alpha \times F \xrightarrow{pr_1} U_\alpha$$

において、pr_1 は開写像なので、$pr_1 \circ \varphi_\alpha$ も開写像。 — ①

$U \subset B$: 部分集合を $p^{-1}(U) \subset E$ が開集合であるものとしてとる。各 $\alpha \in A$ について、

p が連続なので $p^{-1}(U_\alpha)$ も E の開集合。

ゆえに、$p^{-1}(U) \cap p^{-1}(U_\alpha) = p^{-1}(U \cap U_\alpha)$ も E の開集合。

特に、$p^{-1}(U \cap U_\alpha)$ は $p^{-1}(U_\alpha)$ の開集合。

① より、$U \cap U_\alpha$ は U_α の開集合。

U_α は B の開集合なので、

$U \cap U_\alpha$ は B の開集合でもある。

$$U = \bigcup_{\alpha \in A} (U \cap U_\alpha)$$ より U は B の開集合

□

(主 G 束) + (G の F への作用)

= (構造群が G でファイバーが F のファイバー束)

この構成法を具体的に記述しよう。

Def 3.7.16

G : 位相群

G が位相空間 P と F に、それぞれ右と左から連続に作用しているとする。($P \curvearrowleft G, G \curvearrowright F$)

このとき、G の $P \times F$ への(左からの)作用

$$\mu : G \times (P \times F) \longrightarrow P \times F$$

を

$$\mu(g, x, y) = (xg^{-1}, gy)$$

で定める。

この作用による商空間を $P \times_G F$ とかく。

$$P \times_G F := (P \times F)/\sim$$

また、$(x, y) \in P \times F$ の代表する $P \times_G F$ の元を $[x, y] \in P \times_G F$ とかく。

問 3.7.17

μ が作用になっていることを確かめる。

(1) $\forall x \in P$, $\forall y \in F$ に対し、

$$\mu(e, x, y) = (xe^{-1}, ey)$$
$$= (x, y)$$

(2) $\forall g, h \in G$, $\forall (x, y) \in P \times F$ に対し.

$$
\begin{aligned}
\mu(h, \mu(g, x, y)) &= \mu(h, xg^{-1}, gy) \\
&= ((xg^{-1})h^{-1}, h(gy)) \\
&= (x(hg)^{-1}, (hg)y) \\
&= \mu(hg, x, y)
\end{aligned}
$$

また, $\mu(g, x, y) = (xg, gy)$ とおると.

$$
\begin{aligned}
\mu(hg, x, y) &= (x(hg), (hg)y) \\
&= ((xh)g, h(gy))
\end{aligned}
$$

などとなり. 作用にならない.

$\square$

Thm 37.18

主G束 $p : P \to B$ と，
G が左から作用している空間 F に対し，
写像

$$\begin{array}{cccc} \bar{p} : & P \times_G F & \longrightarrow & B \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & [x, y] & \longmapsto & p(x) \end{array}$$

を定義すれば，これは ファイバーを F，構造群を G，
とするファイバー束 となる．
さらに対応

$$\{ B \text{ 上の主 } G \text{ 束} \}$$
$$\longleftrightarrow$$
$$\{ B \text{ 上のファイバーが } F\text{，構造群が } G \text{ のファイバー束} \}$$

の $\to$ は，$(P \to B) \longmapsto (P \times_G F \to B)$
で与えられる．

(∵)

主G束 $p : P \to B$ の局所自明化を
$$\{ \varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G \}$$
とする．

これを元に、

$$\bar{p} : P \times_G F \longrightarrow B$$

の局所自明化写像

$$\{ \psi_\alpha : \bar{p}^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times F \}$$

を作る。まず、

$$\begin{aligned}\bar{p}^{-1}(U_\alpha) &= \{ [x, y] \in P \times_G F \mid \bar{p}([x, y]) \in U_\alpha \} \\ &= \{ [x, y] \in P \times_G F \mid p(x) \in U_\alpha \} \\ &= p^{-1}(U_\alpha) \times_G F\end{aligned}$$

よって写像

$$\bar{p}^{-1}(U_\alpha) = p^{-1}(U_\alpha) \times_G F \xrightarrow{\varphi_\alpha \times_G 1_F} (U_\alpha \times G) \times_G F$$

を得る。

一方、 $[(x, g), y] \in (U_\alpha \times G) \times_G F$ を

$(x, gy) \in U_\alpha \times F$

へ移す写像、つまり

$$1_{U_\alpha} \times \mu : U_\alpha \times G \times F \longrightarrow U_\alpha \times F$$

から誘導される写像

$$\begin{array}{ccc} (U_\alpha \times G) \times_G F & \longrightarrow & U_\alpha \times F \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ [(x, g), y] & \longmapsto & (x, gy) \end{array}$$

は同相写像で、逆写像は

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times F & \longrightarrow & (U_\alpha \times G) \times_G F \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (x, y) & \longmapsto & [(x, e), y] \end{array}$$

(∵
$$\mu(g, (x,g), \gamma) = ((x, g g^{-1}), g.\gamma) = ((x,e), g.\gamma)$$

$$(x, g.\gamma) \longmapsto [(x,e), g.\gamma], \quad ((x,g),\gamma) \sim ((x,e), g.\gamma)$$
$$= [(x,g), \gamma]$$
)

そこで、$\psi_\alpha : \bar{p}^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times F$ を、
次の合成で定義する：

$$\begin{array}{ccccccc}
\bar{p}^{-1}(U_\alpha) = p^{-1}(U_\alpha) \times_G F & \xrightarrow{\varphi_\alpha \times_G 1_F} & (U_\alpha \times G) \times_G F & \xrightarrow{1_{U_\alpha} \times \mu} & U_\alpha \times F \\
\Psi & & \Psi & & \Psi \\
[x, \gamma] & \longmapsto & [(p(x), \Phi_\alpha(x)), \gamma] & \longmapsto & (p(x), \Phi_\alpha(x).\gamma)
\end{array}$$

ここで、φ_α も $1 \times_G \mu$ も 同相写像なので、
ψ_α も 同相写像。
ψ_α は、次の図式を可換にする：

$$\begin{tikzcd}
{[x,\gamma]} \in \bar{p}^{-1}(U_\alpha) \arrow[rr, "\psi_\alpha"] \arrow[dr, "\bar{p}"'] & & U_\alpha \times F \ni (p(x), \Phi_\alpha(x).\gamma) \arrow[dl, "pr_1"] \\
& U_\alpha \ni p(x) &
\end{tikzcd}$$

以上により、$\bar{p} : P \times_G F \longrightarrow B$ は ファイバー束

次に、$P \times_G F$ の構造群を決定するため、
座標変換を考える。

$(x, y) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$ に対し、

$$
\begin{aligned}
\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(x, y) &= \psi_\beta \circ (\varphi_\alpha^{-1} \times_G 1_F) \circ (1_{U_\alpha} \times \mu)^{-1}(x, y) \\
&= \psi_\beta \circ (\varphi_\alpha^{-1} \times_G 1_F)(x, e, y) \\
&= \psi_\beta(\varphi_\alpha^{-1}(x, e), y) \\
&= (1_{U_\beta} \times \mu) \circ (\varphi_\beta \times_G 1_F)(\varphi_\alpha^{-1}(x, e), y) \\
&= (1_{U_\beta} \times \mu)(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, e), y) \\
&= (1_{U_\beta} \times \mu)(x, \Phi^{\alpha\beta}(x) e, y) \\
&= (x, \Phi^{\alpha\beta}(x) y)
\end{aligned}
$$

ここで、$\Phi^{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ は、
$p : P \to B$ の座標変換。

よって、$\bar{p} : P \times_G F \to B$ は、
$P \to B$ と同じ座標変換 $\Phi^{\alpha\beta}$ で与えられ、
G を構造群に持つ。

□

Thm 3.7.21

> G : 位相群
> $p : P \to B$; 主 G 束 とする.
> もし, $p : P \to B$ が 切断 を持てば, 自明束 となる.

(証)

切断 $s : B \to P$ が存在すると仮定.

$$
\begin{array}{ccccc}
\psi & : & B \times G & \longrightarrow & P \\
 & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
 & & (x, g) & \longmapsto & s(x).g
\end{array}
$$

を考える. これは 同相写像 を与えることを示す.

(i) 単射性

$\psi(x_1, g_1) = \psi(x_2, g_2)$ と仮定する.

つまり. $s(x_1).g_1 = s(x_2).g_2$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= p(s(x_1)) = p(s(x_1).g) \\
&= p(s(x_2).g) = p(s(x_2)) = x_2
\end{aligned}
$$

より, $x_1 = x_2$.

また, $s(x_1).g_1 = s(x_1).g_2$ となるので.

$$s(x_1).(g_1 g_2^{-1}) = s(x_1).e$$

(Def 3.7.8) の 構成の仕方から. このとき $g_1 g_2^{-1} = e$

$\therefore$ $g_1 = g_2$ となり ψ は単射.

(ii) 全射性

p の局所自明化を与える B の開被覆
$\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を考える.
任意に $x \in P$ をとり, $\alpha \in A$ として. $p(x) \in U_\alpha$
となるものをとる.

このとき,

$$\psi\left(p(x), \overline{\varphi_\alpha}^{-1}(s(p(x)))\overline{\varphi_\alpha}(x)\right)$$
$$= s(p(x)).\left(\overline{\varphi_\alpha}^{-1}(s(p(x)))\overline{\varphi_\alpha}(x)\right)$$
$$= \varphi_\alpha^{-1}\left(p(s(p(x))), \overline{\varphi_\alpha}(s(p(x)))\overline{\varphi_\alpha}^{-1}(s(p(x)))\overline{\varphi_\alpha}(x)\right)$$
$$= \varphi_\alpha^{-1}\left(p(x), \overline{\varphi_\alpha}(x)\right)$$
$$= x$$

となるので ψ は全射.

また, ψ は. s と. G の P への作用が連続であることから連続. 上で見た逆の対応.

$$\begin{array}{cccc} \psi^{-1} : & P & \longrightarrow & B \times G \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & \left(p(x), \overline{\varphi_\alpha}^{-1}(s(p(x)))\overline{\varphi_\alpha}(x)\right) \end{array}$$

も $\overline{\varphi_\alpha}$ が連続なので連続.
以上により ψ は同相写像. □