

第2章 多価形式としての被覆空間

2.1 被覆空間

Def 2.1.1

B : 連結な Top. Sp.

B 上の 被覆空間 (covering space) とす.

連続写像 $p: E \rightarrow B$ とす.

任意の $x \in B$ に対し、次の条件を満たす x の open nbd U_x .

各点 $y \in p^{-1}(x)$ の open nbd \tilde{U}_y が存在する:

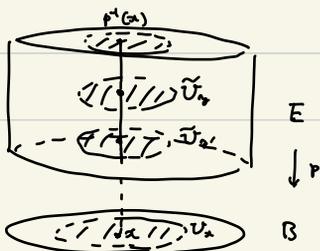
- (1) $y \neq y' \Rightarrow \tilde{U}_y \cap \tilde{U}_{y'} = \emptyset$
- (2) $p(\tilde{U}_y) \subset U_x$ と
 $p|_{\tilde{U}_y}: \tilde{U}_y \rightarrow U_x$ は同相写像.
- (3) $p^{-1}(U_x) = \bigsqcup_{y \in p^{-1}(x)} \tilde{U}_y$ ← 必要

B は 基底空間 (base space)

E は 全空間 (total space)

p は 射影 (projection)

$p^{-1}(x)$ は x 上の ファイバー (fiber) とす.



Rem

~~条件 (2) 4)~~ $p^{-1}(U_x) = \coprod_{y \in p^{-1}(x)} \tilde{U}_y$. \in 定義に入らず.

各 \tilde{U}_y は U_x と同相好の \mathbb{C}^d , $U_x \times \{y\}$ と同視できる.

$$\begin{aligned} \therefore p^{-1}(U_x) &= \coprod_{y \in p^{-1}(x)} \tilde{U}_y \\ &\cong \coprod_{y \in p^{-1}(x)} (U_x \times \{y\}) \\ &= U_x \times p^{-1}(x) \end{aligned}$$

これは 局所自明化 (local trivialization) である.

例 2.13

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \quad \text{と存在する.}$$

$$\begin{array}{ccc} p_2 : S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ \wr & & \wr \\ z & \longmapsto & z^2 \end{array}$$

は、被覆空間 である.

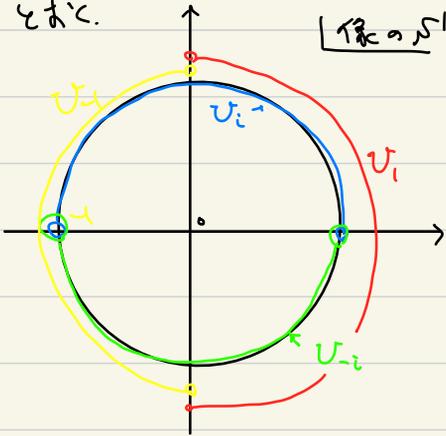
⊙

$$W = W_1 + iW_2 \in \mathcal{N}' \quad |z|=1.$$

\mathcal{N}' においた
 W の
open set

$$U_W = \begin{cases} \{x+iy \in \mathcal{N}' \mid y > 0\}, & W_2 > 0 \\ \{x+iy \in \mathcal{N}' \mid y < 0\}, & W_2 < 0. \\ \{x+iy \in \mathcal{N}' \mid x > 0\}, & W = 1. \\ \{x+iy \in \mathcal{N}' \mid x < 0\}, & W = -1 \end{cases}$$

とある。



$$W = W_1 + iW_2 \in \mathcal{N}'$$

$W_2 > 0$ の場合. (cf. U_i)

$$\begin{aligned} p_2^{-1}(U_W) &= \{z \in \mathcal{N}' \mid z^2 \in U_W\} \\ &= \{e^{i\theta} \in \mathcal{N}' \mid 0 \leq \theta < 2\pi, \sin 2\theta > 0\} \\ &= \{e^{i\theta} \in \mathcal{N}' \mid 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\} \\ &\quad \cup \{e^{i\theta} \in \mathcal{N}' \mid \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi\}. \end{aligned}$$

また、

$$W = e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ と表す。}$$

$$\begin{aligned} p_2^{-1}(W) &= \left\{ e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{\frac{i(\pi+2\pi)}{2}} \right\} \\ &= \left\{ e^{i\frac{\pi}{2}}, -e^{i\frac{\pi}{2}} \right\} \end{aligned}$$

とある。

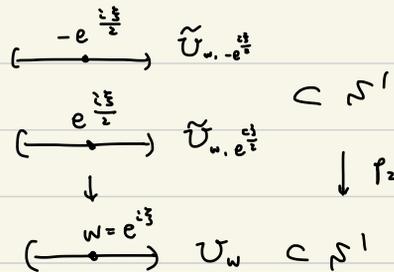
$$\begin{cases} \tilde{U}_W, e^{i\frac{\pi}{2}} = \{e^{i\theta} \in \mathcal{N}' \mid 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\} \\ \tilde{U}_W, -e^{i\frac{\pi}{2}} = \{e^{i\theta} \in \mathcal{N}' \mid \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi\} \end{cases}$$

とあるは。

これはそれぞれ $e^{\frac{iz}{2}}$, $-e^{\frac{iz}{2}}$ の附近傍.

他の $w \in \mathcal{N}'$ についても同様のことが示せる.

よって \mathcal{P}_2 は 被覆空間の条件を満たす.



$x \in B$ については 附近傍 U_x は 必ず 無窮大 が多い!

($x' \in U_x$ かつ $U_{x'} = U_x$ である節約).

Prop 2.1.4 (由被覆による被覆空間の定義)

B : 連結な空間

連続写像

$$\gamma: E \rightarrow B$$

B 上の被覆空間であるための必要十分条件は、

B の由被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ と

各 $\alpha \in A$ と $x \in U_\alpha$ と $\gamma \in \pi^{-1}(x)$ に対し
 γ の近傍 $\tilde{U}_{\alpha, \gamma}$ に対し以下の条件をみたすものが存在する。

すなわち:

$$(1) \gamma \neq \gamma' \Rightarrow \tilde{U}_{\alpha, \gamma} \cap \tilde{U}_{\alpha, \gamma'} = \emptyset.$$

$$(2) \gamma(\tilde{U}_{\alpha, \gamma}) \subset U_\alpha \text{ かつ}$$

$$p|_{\tilde{U}_{\alpha, \gamma}}: \tilde{U}_{\alpha, \gamma} \rightarrow U_\alpha \text{ は同相写像.}$$

例 2.1.5

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し、

$$p_n: S^1 \longrightarrow S^1, \quad \exp: \mathbb{R} \longrightarrow S^1$$

$$\begin{array}{ccc} \circlearrowleft & & \circlearrowleft \\ z & \longmapsto & z^n \\ & & t \longmapsto e^{2\pi i t} \end{array}$$

は被覆空間.

[proof]

$$p_n : \begin{array}{ccc} \mathcal{N}' & \longrightarrow & \mathcal{N}' \\ \downarrow \subset & & \downarrow \subset \\ \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R}^n \end{array} \quad \text{は 被覆空間 であることを示す.}$$

$w = w_1 + iw_2 \in \mathcal{N}'$ (\mathbb{T} の \mathcal{N}') に対して.

開近傍 U_w を次で定めた.

$$U_w = \left\{ \begin{array}{ll} \{x + iy \in \mathcal{N}' \mid y > 0\} & (w_2 > 0 \text{ のとき}) \\ \{x + iy \in \mathcal{N}' \mid y < 0\} & (w_2 < 0 \text{ のとき}) \\ \{x + iy \in \mathcal{N}' \mid x > 0\} & (w = 1 \text{ のとき}) \\ \{x + iy \in \mathcal{N}' \mid x < 0\} & (w = -1 \text{ のとき}) \end{array} \right.$$

(先程と同様).

例) 这时 $w \in \mathcal{N}'$ は $w_2 > 0$ を満たす.

$$\begin{aligned} p_n^{-1}(U_w) &= \{z \in \mathcal{N}' \mid z^n \in U_w\} \\ &= \{e^{i\theta} \in \mathcal{N}' \mid 0 \leq \theta < 2\pi, \sin(n\theta) > 0\} \\ &= \bigcup_{k=0}^{n-1} \{e^{i\theta} \in \mathcal{N}' \mid 2k\pi < n\theta < (2k+1)\pi\} \end{aligned}$$

$e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$
 \downarrow
 > 0

(T の S^1 上) $w = e^{i\theta}$ と表す。

$$P_n^{-1}(w) = \left\{ e^{\frac{i\theta}{n}}, \dots, e^{\frac{i}{n}(\theta + 2k\pi)}, \dots, e^{\frac{i}{n}(\theta + (2n-1)\pi)} \right\}$$

($k=0, 1, \dots, n-1$)

よって $\tilde{U}_k = \left\{ e^{i\theta} \in S^1 \mid \frac{2k\pi}{n} < \theta < \frac{(2k+1)\pi}{n} \right\}$ とおくと。

$P_n : S^1 \rightarrow S^1$ は U_k 被覆空間の条件を T に対して U_k 分けた。
 $\begin{matrix} S^1 & \rightarrow & S^1 \\ \cong & \mapsto & \cong \\ U & \mapsto & U \end{matrix}$ U_k 上では。

$w = 0$, $w = 1$, $w = -1$ の場合は同様で。

$P_n : S^1 \rightarrow S^1$ は被覆空間。
 $\begin{matrix} S^1 & \rightarrow & S^1 \\ \cong & \mapsto & \cong \\ U & \mapsto & U \end{matrix}$

次に $\exp : \mathbb{R}^1 \rightarrow S^1$ かつ
 $\begin{matrix} \mathbb{R}^1 & \longrightarrow & S^1 \\ \cong & \mapsto & \cong \\ t & \longmapsto & \exp(2\pi i t) \end{matrix}$

被覆空間であることを示す。

$w = w_1 + iw_2 \in S^1$ に対して、先程と同様に
 開近傍 U_w を定めた。

例) $\omega > 0$ のとき

$$\begin{aligned}\exp^{-1}(U_\omega) &= \{t \in \mathbb{R} \mid e^{2\pi i t} \in U_\omega\} \\ &= \{t \in \mathbb{R} \mid \sin(2\pi t) > 0\} \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{t \in \mathbb{R} \mid 2k\pi < 2\pi t < (2k+1)\pi\} \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{t \in \mathbb{R} \mid k < t < k + \frac{1}{2}\}\end{aligned}$$

よ、 $\tilde{U}_k := \{t \in \mathbb{R} \mid k < t < k + \frac{1}{2}\}$ とおく。

被覆空間の条件 (1) (2) を満たす。他も同様。

$\therefore \exp: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ は被覆空間