準備パート（§6.3 など）

以下、環は可換環とする。

§1. 交叉定理

Thm 6.10（交叉定理）

$(A, \mathfrak{m})$: n 次元局所 Noether $\mathbb{C}$-代数

$$0 \to M_s \to M_{s-1} \to \cdots \to M_0 \to 0$$

を有限生成自由 A-加群のなす完全でない複体で、各コホモロジー $\mathcal{H}^i(M_\cdot)$ は有限の長さの組成列を持つ A-加群とする。

このとき、$s \geq n$ が成り立つ。

さらに、$s = n$ であり、かつ $\mathcal{H}^0(M_\cdot) \cong A/\mathfrak{m}$ であるとき

$$\forall i \neq 0, \quad \mathcal{H}^i(M_\cdot) = 0$$

が成り立ち、A が正則となる。

Def 6.11 (ホモロジカル次元)

X : Noether スキーム

$0 \neq E \in D^b(X)$ とする.

$\mathrm{Coh}(X)$ は十分な局所自由層を持つ. すなわち

任意の連接層が有限階数の局所自由層の商で書けている. とする.

E が $D^b(X)$ の対象として局所自由層のなす長さ s の複体と同型であるような最小の s の値を E の ホモロジカル次元 (homological dimension) といい, $\mathrm{hom\,dim}\, E$ と表す.

E が局所自由層のなす有限の長さの複体と同型とはならないとき, $\mathrm{hom\,dim}\, E = \infty$ と定める.

Rem 6.13

ホモロジカル次元が有限な対象は 狭義完全複体 (strict perfect complex) という.

局所的に狭義完全複体と擬同型となるとき 完全複体 (perfect complex) という

(X が quasi-projective algebraic variety なら
完全複体は狭義完全複体)

Cor 6.14

X : $\mathbb{C}$ 上 有限型スキーム

$0 \neq E \in D^b(X)$ を考える.

このとき,

$$\operatorname{codim} \operatorname{Supp}(E) \leq \operatorname{hom\,dim} E$$

∵

$\operatorname{hom\,dim} E = \infty$ なら明らか.

E が, 局所自由層からなる長さ s $(<\infty)$ の複体と同型であるとする.

$\operatorname{Supp}(E)$ の既約成分 Γ とその生成点 η に対し,
E の各項を $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,\eta})$ に制限した複体を
E_0 とすると, (Eisenbud 2000 Cor 2.18 後述) より
各コホモロジー $\mathcal{H}^i(E_0)$ は有限の長さの組成列を持つ
$\mathcal{O}_{X,\eta}$ の加群となる.

よって, (Thm 6.10) より $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X,\eta} \leq s$.

一方で,

$$\operatorname{codim} \operatorname{Supp} E \leq \operatorname{codim} \Gamma \overset{(c)}{=} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X,\eta} \leq s$$

(∵ Ha. Ch.II. Ex 3.20 (c))

$\operatorname{codim}(\Gamma, X) = \inf\{\dim \mathcal{O}_{X,\eta} \mid \eta \in \Gamma\}$

□

Cor 2.18 of Eisenbud 2000 (Commutative Algebra)

R : Noether 環.

$0 \neq M$: 有限生成 R 加群.

I : M の annihilator ($I = \{ r \in R \mid rM = 0 \}$)

P : I を含む R の素 ideal.

このとき.

R_P 加群 M_P が非自明で, 有限の長さの組成列を持つ.

$\iff$

P は I を含む素 ideal の中で極大.

Lem 6.16 (Bridgeland-Maciocia '02 Prop 5.4)

X : Noether scheme で, $\mathrm{Coh}(X)$ が十分な局所自由層を持つ

$0 \neq E \in D^b(X)$ をとる

$s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し, 次は同値:

(i) $\exists j \in \mathbb{Z}$ s.t. $(\forall x \in X, \forall i \notin [j, j+s])$

$$\mathrm{Hom}^i_X(E, \mathcal{O}_x) = 0.$$

(ii) $\mathrm{hom\,dim}\, E \leq s.$

[(ii) ⇒ (i) のみ]

$\mathrm{hom\,dim}\, E \leq s$ を仮定すると,

E は局所自由層からなる長さ s 以下の複体 $M_\bullet$ と

$D^b(X)$ の対象として同型.

$$\cdots \to 0 \to \underbrace{\overset{j}{M_0} \to M_1 \to M_2 \to \cdots \to M_l}_{\leq s} \to 0 \to \cdots$$

このとき, $\exists j \in \mathbb{Z}$ s.t. $(\forall x \in X, \forall i \notin [j, j+s])$

$$\mathcal{H}^i(E^\vee \otimes \mathcal{O}_x) = 0$$ であり

$$\mathrm{Hom}^i_X(E, \mathcal{O}_x) \cong \mathcal{H}^i(\mathbb{R}\Gamma(X, E^\vee \otimes \mathcal{O}_x)) \cong \mathcal{H}^i(E^\vee \otimes \mathcal{O}_x)$$

より (i) を得る.

Cor 6.15

X : $\mathbb{C}$ 上の n 次元 Quasi-Projective Variety

点 $x \in X$, $E \in D^b(X)$ で

$$\mathcal{H}^0(E) \cong \mathcal{O}_x$$

をみたすものとする.

点 $x' \in X$ が x と異なるか, もしくは

$i \in \mathbb{Z}$ が $i \notin [0, n]$ をみたすとき.

$$\mathrm{Hom}_X^i(E, \mathcal{O}_{x'}) = 0$$

が成り立つとする.

このとき. X は点 x で非特異で, $E \cong \mathcal{O}_x$ が成立.

∵

仮定より. $\mathrm{Supp}(E) = \{x\}$.

(Cor 6.14) より $n \leq \mathrm{hom\,dim}\, E$.

さらに. 仮定と. (Lem 6.16) より $\mathrm{hom\,dim}\, E \leq n$.

よって. $\mathrm{hom\,dim}\, E = n$ となる.

ゆえに, E は X 上の局所自由層からなる長さ n の

複体 $M_\cdot$ であると思え. さらに各 $H^i(M_\cdot)$ は長さ有限の

組成列を持つ.

$M_\bullet$ を $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ に制限すると、

仮定により $\mathcal{H}^0(M_\bullet) \cong \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ $(\neq 0)$

$\mathcal{H}^0(E) \cong \mathcal{O}_{X,x}$

(Thm 6.10) より、$\forall i \neq 0$, $\mathcal{H}^i(M_\bullet) = 0$ なので、

$\mathcal{O}_{X,x}$ が正則となる。

つまり X は点 x で非特異かつ $E \cong \mathcal{O}_{X,x}$ □

§2. クレパント解消

X : 代数多様体

$f : Y \longrightarrow X$; 特異点解消 とする。

また、X が有理特異点を持つ、とする。

つまり、$f_* \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X$ とする。

さらに、$\forall i > 0,\ R^i f_* \mathcal{O}_Y = 0$ を仮定する。

$D^b(Y)_c$: $D^b(Y)$ の中で Support が Proper な対象からなる充満部分圏

$D^b(Y)_x$ $(x \in X)$: $D^b(Y)_c$ の中で、Support が $f^{-1}(x)$ に含まれる対象からなる充満部分圏

を定める。

Lem (BKR Lem 3.1)

各 $x \in X$ に対して $D^b(Y)_x$ が自明な Serre 函手 ($\mathrm{id}_{D^b(Y)_x}$) を持つとする。このとき、X は Gorenstein で、

$$f : Y \to X$$

はクレパント解消。