§1. 主定理

Def

X, Y : 滑らかで射影的な代数的多様体.

$D^b(Coh(X)) \cong D^b(Coh(Y))$ のとき.

Y は X の (X は Y の) Fourier-向井パートナー である.

という. (D-equivalence ともいう)

$FM(X)$ で, X の Fourier-向井パートナーの同型類の集合を表す.

Main Theorem

X : 滑らかな射影的代数曲面

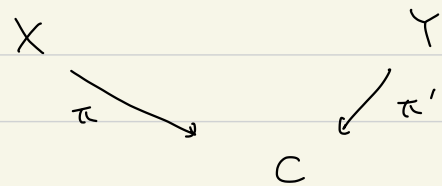
このとき. $FM(X)$ は有限集合であり

さらに, $Y \in FM(X)$ は以下の場合を除いて $Y \cong X$.

(i) X と Y が共に K3 (or Abel) 曲面.

(ii) $\exists$ C : 滑らかな射影的代数曲線.

$\exists$ 図式.

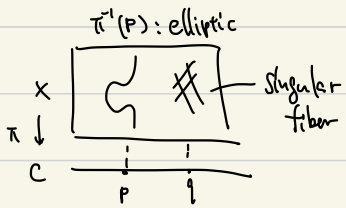


s.t.

π, π' は ともに. 相対的極小な

楕円曲面 ↑

ファイバーに (-1)-curve が含まれない.



Def

$\pi : X \to S$ を滑らかな射影代数的特性の間の射.

そして、次を仮定する:

- $\dim S = \dim X - 1$, $\pi_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_S$.
- π のファイバーに含まれる任意の曲線 $C \subset X$ について
$$K_X \cdot C = 0.$$

このとき. $\exists U \subset S$: Zariski open

s.t.

$\forall p \in U$, $X_p := \pi^{-1}(p)$ は 滑らかな楕円曲線.

このような f を，相対的極小な楕円ファイバー空間
という．（$\dim X = 2$ のときは楕円曲面）

§2. 代数曲面の分類（Enriquesの分類）

X ： 滑らかな射影的代数的多様体．

K_X ： X の標準因子．

$$\Phi_{|nK_X|} : X \dashrightarrow \mathbb{P}^m, \quad x \longmapsto [s_0(x) : s_1(x) : \cdots : s_m(x)]$$

$\kappa(X) := \sup \dim \Phi_{|nK_X|}(X)$ とおく．

これを小平次元という．（$|nK_X| = \phi$ なら $\kappa(X) = -\infty$）

X ： 滑らかな射影的代数曲面 とする．

$\kappa(X) = -\infty$ ：
- $\mathbb{P}^2$
- minimal rational ruled surface $\mathbb{F}_n$
  （$\mathbb{F}_n = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$, $n = 0, 2, 3, \cdots$）
- ruled surface s.t. $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \to C$, $g(C) \geq 1$.

$\mathrm{Kod}(X) = 0$

- Abel 曲面
- K3 曲面
- 双楕円曲面 (E, F : ell. $(E \times F)/G$.)
- Enriques 曲面 ($K_X^{\otimes 2} \cong \mathcal{O}_X$, $K_X \not\cong \mathcal{O}_X$)

$\mathrm{Kod}(X) = 1$ ・ 楕円曲面

$\mathrm{Kod}(X) = 2$ ・ 一般型.

[証明の方針]

- K_X が ネフかどうか.
- 各小手次元 について.

場合分けをして調べていく.

§3. Main Theorem の証明

(III) K_X が nef でないとき.

Prop (Huybrechts Prop 12.15) (Kawamata '02 thm 1.6)

K_X が nef でない、とする.

また、Y : 滑らかな 射影的 代数的 様体 で.

$$D^b(\mathrm{Coh}(X)) \cong D^b(\mathrm{Coh}(Y))$$

となるものが 存在するとする. ($Y \in FM(X)$)

このとき. 次の (i) (ii) のどちらかが 成立.

(i) $X \cong Y$

(ii) X は. 相対 極小な 楕円曲面の構造を持つ

(ii) の場合. さらに. X は 次のどちらか.

(ii)-a : (-1)-Curve を含む 有理曲面

(ii)-b : $\mathbb{P}_C(\mathcal{E}) \to C$, $g(C) = 1$.

Cor

X が (-1)-curve を含むとき.

$Y \leftarrow X$ ならば, X は有理曲面で, かつ

相対極小な楕円曲面.

(relatively minimal elliptic rational surface)

Cor

$\mathrm{Kod}(X) = -\infty$ のとき.

$Y \leftarrow X$ ならば, X は楕円曲面.

たとえば. $\mathbb{P}^2$ や $\mathbb{F}_0$ は Fano 多様体. つまり. $-K_X$ が ample.

よって. 次の Bondal-Orlov の結果により. $X \simeq Y$ となる.

Prop

X, Y : 滑らかな射影的代数多様体.

X : K_X か $-K_X$ が ample.

このとき.

$$D^b(\mathrm{Coh}(X)) \simeq D^b(\mathrm{Coh}(Y)) \Rightarrow X \simeq Y.$$

また, K_Y, $-K_Y$ も ample. となる.

□

次に、K_X が ネフ の場合を考える.

このとき. $\mathrm{kod}(X) \geq 0$.

(i) $\mathrm{kod}(X) = 0$ のとき.

Prop (導来 Torelli)

X : K3 曲面 であるとする. $\left(\begin{array}{l} K_X \simeq \mathcal{O}_X \\ h^1(X, \mathcal{O}_X) = 0 \end{array}\right)$

このとき、Y も K3 曲面 であり.

向井格子 $(H^*(X,\mathbb{Z}), \langle -,- \rangle)$ と $(H^*(Y,\mathbb{Z}), \langle -,- \rangle)$ は

Hodge 等長同型. $H^*(X,\mathbb{Z}) = \bigoplus_{i=0}^{4} H^i(X,\mathbb{Z})$

(逆も成立).

Prop

X : Abel 曲面 であるとする.

このとき. Y も Abel 曲面 であり.

Hodge 等長射

$$H^1(f) : H^1(A \times_k \hat{A}, \mathbb{Z}) \to H^1(B \times_k \hat{B}, \mathbb{Z})$$

を 誘導する同型射

$$f : A \times_k \hat{A} \to B \times_k \hat{B}$$

が存在. (逆も成立).

Prop

X が Enriques 曲面 や 双楕円曲面 のとき、$X \cong Y$.

(iii) $\mathrm{kod}(X) = 1$ のとき.

X : 滑らかな 射影的 代数曲面, $\mathrm{kod}(X) = 1$.

とする.

このとき、X は 楕円 曲面の 構造

$$\pi : X \to C$$

を 持つ.

Prop

X を 上記の 曲面とする.

f を π の ファイバー の コホモロジー類 とする. ($H^2(X, \mathbb{Z})$ の 元と見なす)

X の Fourier - 向井 ペア Y に対し.

- ある 向井 ベクトル $v = (0, rf, d)$ と.
- ある 偏極 h

が 存在して.

$$g.c.d\,(r \cdot (f.h), d) = 1.$$

かつ $Y \cong M_v(h)$ となる.

($M_v(h)$ は、ある条件をみたす X 上の半安定層の fine moduli space.)

(iii) $\kappa(X) = 2$ のとき.

Prop

$\kappa(X) = 2$ のとき、 $Y \cong X$