Def 3.6.37

群 G の X への作用は、
すべての $x \in X$ に対し $\mathrm{Iso}_x(G)$ が自明な群
となるとき、自由な作用 (free action) とよばれる。

このとき、Gx が G と、作用も込めて同一視できる。

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\sim} & Gx \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ g & \longmapsto & gx \end{array}$$

$$\left(g_1 x = g_2 x \Rightarrow g_1^{-1} g_2 x = x \Rightarrow g_1^{-1} g_2 = e \Rightarrow g_1 = g_2 \right)$$

次に、(Thm 3.6.33) を用いて

$$S^{n-1} \cong O(n) / O(n-1)$$

を示す。

そのためにいくつか準備をする。

Prop 3.6.39

直交群 $O(n)$ はコンパクトな位相群

㊟

まず，$O(n)$ は位相群である．実際，

$A \in O(n) \Rightarrow \det(A) = \pm 1 \neq 0$ より

$A \in GL_n(\mathbb{R})$，つまり $O(n) \subset GL_n(\mathbb{R})$

なので，$O(n)$ が $GL_n(\mathbb{R})$ の部分群であることを示せばOK.

つまり，$\forall A, B \in O(n)$，$AB^{-1} \in O(n)$ を示す．

$A, B \in O(n)$ より $\quad {}^tAA = E_n, \quad A^{-1} = {}^tA$

$\qquad\qquad\qquad\qquad {}^tBB = E_n, \quad B^{-1} = {}^tB$

なので，

$$
\begin{aligned}
{}^t(AB^{-1})(AB^{-1}) &= {}^t(A\,{}^tB)(AB^{-1}) \\
&= {}^t{}^tB\,{}^tA\,A\,B^{-1} \\
&= B\,E_n\,B^{-1} \\
&= E_n
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad AB^{-1} \in O(n)$.

よって，$O(n)$ は $GL_n(\mathbb{R})$ の位相部分群．

$O(n) \subset M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ より，$O(n)$ が

$\mathbb{R}^{n^2}$（ユークリッド空間）の有界閉部分集合であることを示す．

$A \in O(n)$ に対し、$A = (a_{ij})$ と書いたとき、
${}^tA = (b_{ij})$ とおく。$A\,{}^tA = E_n$ より、

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$$

$b_{ij} = a_{ji}$ なので、

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{kj} = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$$

特に、各 i について、$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 1$. でこれらを合わせて、

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 = n.$$

つまり、$O(n)$ は $\mathbb{R}^{n^2}$ の中の原点を中心とする
半径 $\sqrt{n}$ の球面に含まれる。ゆえに有界。

また、$s(A) = A\,{}^tA$ で定まる写像

$$\begin{aligned} s : M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ A &\longmapsto A\,{}^tA \end{aligned}$$

は連続で、$O(n) = s^{-1}(\{E_n\})$.

$M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ は Hausdorff なので、1点集合である $\{E_n\}$ は閉集合. $\therefore$ $O(n)$ も閉集合.
ユークリッド空間においては、有界閉集合はコンパクトなので、$O(n)$ はコンパクトな位相群.

$\square$

次に、$O(n)$ の S^{n-1} への作用を次で定める:

$$\begin{array}{rccc} \mu : & O(n) \times S^{n-1} & \longrightarrow & S^{n-1} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & (A, v) & \longmapsto & \mu(A, v) = Av \end{array}$$

S^{n-1} は Hausdorff 空間 $\mathbb{R}^n$ の部分空間として Hausdorff
また、(Prop 3.6.39) より $O(n)$ はコンパクト.

(Thm 3.6.33) を用いるために、作用 μ が推移的であることを示す.

$v \in S^{n-1}$ に対し、v を含む $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底
$$\{a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n = v\}$$
を取り、
これを行ベクトルとする行列をつくる.

$$A = \begin{pmatrix} {}^t a_1 \\ \vdots \\ {}^t a_n \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l} a_i \text{ はタテベクトル} \\ {}^t a_i \text{ はヨコベクトル} \end{array} \right)$$

このとき、

$$A\,{}^tA = \begin{pmatrix} {}^t a_1 \\ \vdots \\ {}^t a_n \end{pmatrix} (a_1, \cdots, a_n)$$

$$= \begin{pmatrix} {}^t a_1 a_1 & {}^t a_1 a_2 & \cdots & {}^t a_1 a_n \\ {}^t a_2 a_1 & {}^t a_2 a_2 & \cdots & {}^t a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^t a_n a_1 & {}^t a_n a_2 & \cdots & {}^t a_n a_n \end{pmatrix}$$

ここで、 $\{a_1, \cdots, a_n\}$ が 正規直交基底だったので、

$${}^t a_i a_j = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

ゆえに、 $A\,{}^tA = E_n$ となり、 $A \in O(n)$

この行列 A を用いれば.

$$A v = \begin{pmatrix} {}^t a_1 v \\ \vdots \\ {}^t a_n v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t a_1 a_n \\ \vdots \\ {}^t a_n a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

つまり, $e_n = {}^t(0, \cdots, 0, 1)$ とおくと.

$$\forall v \in S^{n-1}, \ \exists A \in O(n), \ \text{s.t. } Av = e_n.$$

同様にして. 別の点 $u \in S^{n-1}$ に対しても
$Bu = e_n$ となる $B \in O(n)$ をとれば.

同時にできる??
→ 基底変換を経由する.

$$A^{-1} B u = A^{-1} e_n = v$$

$A^{-1} B \in O(n)$ より. $O(n)$ の S^{n-1} への作用は推移的.

注
(A, v), (B, u) に対応する e_n は
正規直交基底として違うものだが. $\exists P \in O(n)$
s.t. $e_n^v = P \cdot e_n^u$ (基底変換の行列)
よって.
$A^{-1}PB \in O(n)$, $A^{-1}PBu = A^{-1}Pe_n^u = A^{-1}e_n^v = v$

ゆえに、(Thm 3.6.33) より $v \in S^{n-1}$ の等方部分群

$$\mathrm{Iso}_v(O(n)) = \{ A \in O(n) \mid Av = v \}$$

による商空間と、S^{n-1} の間の同相

$$S^{n-1} \cong O(n) / \mathrm{Iso}_v(O(n))$$

を得る。

特別な $v \in S^{n-1}$ に対する $\mathrm{Iso}_v(O(n))$ のみを考えればよいことは、次の問による。

問 3.6.41

位相群 G が位相空間 X に推移的に作用しているとする。
このとき、任意の $x, y \in X$ に対して、
$\mathrm{Iso}_x(G)$ と $\mathrm{Iso}_y(G)$ とは G の中で互いに共役な部分群。

$\because$ $\forall x, y \in X$, $\exists g_0 \in G$ s.t. $y = g_0 . x$

また、$g \in \mathrm{Iso}_y(G)$ なら、$g.y = y$

つまり、$g.(g_0 . x) = g_0 . x$

$\therefore$ $(g_0^{-1} g g_0) . x = x$

ゆえに、 $g_0^{-1}(\mathrm{Iso}_y(G))g_0 \subset \mathrm{Iso}_x(G)$

同様に、 $x = g_0^{-1}.y$ なので、

$g_0(\mathrm{Iso}_x(G))g_0^{-1} \subset \mathrm{Iso}_y(G)$.

よって、

$$\begin{tikzcd}
g_0(-)g_0^{-1} : & G \arrow[r] & G \\
& \mathrm{Iso}_x(G) \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=90] \arrow[r] & \mathrm{Iso}_y(G) \arrow[u, phantom, "\cup"]
\end{tikzcd}$$

により、 $\mathrm{Iso}_x(G)$ と $\mathrm{Iso}_y(G)$ は互いに共役り合う。

特に群として $g_0(\mathrm{Iso}_x(G))g_0^{-1} \cong \mathrm{Iso}_y(G)$ □

次に、 $\mathrm{Iso}_v(O(n))$ の具体的な表示を調べる。

Claim

$\mathrm{Iso}_v(O(n)) \simeq O(n-1)$

∵ $v \in S^{n-1}$ をひとつとり固定する。

$\mathbb{R}^n$ の正規直交基底として

$\{e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}, e_n = v\}$

をとる。

このとき、 $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Iso}_v(O(n))$ とすると、

$Ae_n = e_n$ なので、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より.

$$\begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{n-1,n} \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

また, $A\,{}^tA = E_n$ より.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n-1,1} & a_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{1,n-1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n,n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore \quad a_{n,1}^2 + \cdots + a_{n,n-1}^2 + 1 = 1 \qquad (a_{n,i} \in \mathbb{R})$

$a_{n,i}^2 \geq 0$ より. $\quad a_{n,1} = \cdots = a_{n,n-1} = 0.$

$$\therefore \quad A = \begin{pmatrix} A' & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \cdots 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで.

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

${}^tAA = E_n$ より. ${}^tA'A' = E_{n-1}$, つまり $A' \in O(n-1)$.

ゆえに, $A \in \mathrm{Iso}_{e_n}(O(n)) \Rightarrow \exists A' \in O(n-1)$

s.t. $A = \begin{pmatrix} A' & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \cdots 0 & 1 \end{pmatrix}$.

逆に, $A' \in O(n-1)$ ならば.

$$\begin{pmatrix} A' & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \cdots 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

により $\begin{pmatrix} A' & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \cdots 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Iso}_{e_n}(O(n))$.

これにより　($e_n = v$ だったので)

$$\begin{array}{ccc} O(n-1) & \longrightarrow & \mathrm{Iso}_v(O(n)) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ A' & \longmapsto & \begin{pmatrix} A' & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \cdots 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

は、位相群としての同型を与える。 □

ゆえに、

$$S^{n-1} \cong O(n)/O(n-1).$$

次に、位相群 G とその閉部分群 H に対し、

$$G \longrightarrow G/H$$

が、H をファイバーとするファイバー束になっていることを見る。
(Thm 3.6.48 : local section があればそうなる)

$G = O(n)$, $H = O(n-1)$ の場合を考える。

$$\begin{array}{cccc} p: & O(n) & \longrightarrow & O(n)/O(n-1) \cong S^{n-1} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & A & \longmapsto & Ae_n \end{array}$$

である。

Prop 3.6.43

$A \in O(n)$ に対し、写像

$$\begin{array}{cccc} p: & O(n) & \longrightarrow & S^{n-1} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & A & \longmapsto & Ae_n \end{array}$$

は、$O(n-1)$ をファイバーとするファイバー束。

Rem

構造群も $O(n-1)$ であることは §3.7

∵ 局所自明化写像を作る。

Step 1

S^{n-1} の開被覆 $\{U_\alpha\}$ と連続写像

$$s_\alpha : U_\alpha \longrightarrow p^{-1}(U_\alpha)$$

で、
$$p \circ s_\alpha = 1_{U_\alpha}$$

となるもの、を見つける。

Step 2

各 α に対し、写像

$$\begin{array}{cccc} \varphi_\alpha : & p^{-1}(U_\alpha) & \longrightarrow & U_\alpha \times O(n-1) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & A & \longmapsto & (p(A),\ s_\alpha(p(A))^{-1}A) \end{array}$$

を定義。

Step 3

各 φ_α が 同相写像 であることを示すため.

写像 $\psi_\alpha : U_\alpha \times O(n-1) \longrightarrow p^{-1}(U_\alpha)$

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times O(n-1) & \longrightarrow & p^{-1}(U_\alpha) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (x, A) & \longmapsto & s_\alpha(x) A \end{array}$$

を定義し、これが φ_α の逆写像 になっていることを示す.

[Step 1]

S^{n-1} の開被覆 として.

$$\begin{cases} U_+ = S^{n-1} \setminus \{e_n\} \\ U_- = S^{n-1} \setminus \{-e_n\} \end{cases}$$

をとる.

写像 $s_+ : U_+ \longrightarrow p^{-1}(U_+)$ を.

$x = (x_1, \cdots, x_n) \in U_+$ に対し.

$$s_+(x) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{x_1 x_1}{1-x_n} & -\frac{x_1 x_2}{1-x_n} & \cdots & -\frac{x_1 x_{n-1}}{1-x_n} & x_1 \\ -\frac{x_2 x_1}{1-x_n} & 1 - \frac{x_2 x_2}{1-x_n} & & \vdots & x_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\frac{x_{n-1} x_1}{1-x_n} & \cdots & \cdots & 1 - \frac{x_{n-1} x_{n-1}}{1-x_n} & x_{n-1} \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \end{pmatrix}$$

と定める.

問 3.6.44

$S_+(x) \in O(n)$

∵

$$S_+(x) = E_n - \frac{B}{1-x_n}$$

$$B = \begin{pmatrix} x_1 x_1 & x_2 x_1 & \cdots & x_{n-1} x_1 & (x_n-1) x_1 \\ x_1 x_2 & x_2 x_2 & \cdots & x_{n-1} x_2 & (x_n-1) x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1 x_{n-1} & x_2 x_{n-1} & \cdots & x_{n-1} x_{n-1} & (x_n-1) x_{n-1} \\ x_1 (x_n-1) & x_2 (x_n-1) & \cdots & x_{n-1}(x_n-1) & (x_n-1)^2 \end{pmatrix}$$

と分解する。 B は。

$$x' = {}^t(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n-1)$$

とおいたとき

$$B = (x_1 x', \ x_2 x', \ \cdots, \ x_{n-1} x', \ (x_n-1) x')$$

と表せる。

$S_+(x)$ は対称行列だから。

$$S_+(x)\, {}^t S_+(x) = (S_+(x))^2 = \left(E_n - \frac{1}{1-x_n} B\right)^2$$

$$= E_n - \frac{2}{1-x_n} B + \frac{1}{(1-x_n)^2} B^2$$

よって。 $B^2 = 2(1-x_n)B$ を示せばよい。

例えば、 $i, j < n$ のとき、 B^2 の (i,j) 成分は、

$$
(x_1 x_i,\ x_2 x_i,\ \cdots,\ x_{n-1} x_i,\ (x_n - 1) x_i) \begin{pmatrix} x_j x_1 \\ x_j x_2 \\ \vdots \\ x_j x_{n-1} \\ x_j (x_n - 1) \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= x_i x_j \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + (x_n - 1)^2 \right) \\
&= x_i x_j \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + x_n^2 - 2x_n + 1 \right) \\
&= 2 x_i x_j (1 - x_n).
\end{aligned}
$$

となり、 $2(1-x_n) B$ の (i,j) 成分と一致する。

同様の計算で、 $B^2 = 2(1-x_n) B$ が示せるので、

$$
s_+(x) \in O(n).
$$

□

$\forall x \in U_+,\quad p \circ s_+(x) = s_+(x) e_n = x.$

より、 s_+ は $p \circ s_+ = 1_{U_+}$ をみたす。

s_- は、 $C = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & & -1 \end{pmatrix}$ とおいて、

$x \in U_-$ に対して、 $s_-(x) = C^{-1} s_+(Cx)$

とおけばよい。

[Step 2]

まず，
$$\begin{array}{rccc} \varphi_\alpha : & p^{-1}(U_\alpha) & \longrightarrow & U_\alpha \times O(n-1) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & A & \longmapsto & (p(A),\ s_\alpha(p(A))^{-1}A) \end{array}$$

が well-defined でかつ連続であることを示す。

p, s_α が連続なので，$U_\alpha \times O(n)$ への写像として，

φ_α は連続。

$$s_\alpha(p(A))^{-1}A \in O(n-1) \cong Iso_{e_n}(O(n))$$

を示すため，$s_\alpha(p(A))e_n$ と Ae_n を比べる。

p の定義や $p \circ s_\alpha = 1_{U_\alpha}$ より，

$$\begin{aligned} s_\alpha(p(A))e_n &= p(s_\alpha(p(A))) \\ &= p(A) \\ &= Ae_n \end{aligned}$$

ゆえに，$(s_\alpha(p(A)))^{-1}Ae_n = e_n$

よって，$s_\alpha(p(A))^{-1}A \in Iso_{e_n}(O(n)) \cong O(n-1)$.

[Step 3]

$$\begin{array}{rccc} \psi_\alpha : & U_\alpha \times O(n-1) & \longrightarrow & p^{-1}(U_\alpha) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & (x,\ A) & \longmapsto & s_\alpha(x)A \end{array}$$

について，s_α が連続なので ψ_α も連続。

$$p(\psi_\alpha(x,A)) = p(s_\alpha(x)A)$$
$$= s_\alpha(x)Ae_n$$
$$= s_\alpha(x)e_n \qquad (\because A \in \mathrm{Iso}_{e_n}(O(n)))$$
$$= p(s_\alpha(x))$$
$$= x$$

よって、 $\psi_\alpha(x,A) \in p^{-1}(U_\alpha)$ となり、 ψ_α は well-defined.

$(x,A) \in U_\alpha \times O(n-1)$ に対し、

$$\varphi_\alpha \circ \psi_\alpha(x,A) = \varphi_\alpha(s_\alpha(x)A)$$
$$= (p(s_\alpha(x)A),\ s_\alpha(p(s_\alpha(x)A))^{-1}s_\alpha(x)A)$$

$A \in O(n-1) \cong \mathrm{Iso}_{e_n}(O(n))$ より、

$$p(s_\alpha(x)A) = s_\alpha(x)Ae_n$$
$$= s_\alpha(x)e_n$$
$$= p(s_\alpha(x)) = x$$

ゆえに、

$$\varphi_\alpha \circ \psi_\alpha(x,A) = (x,\ s_\alpha(x)^{-1}s_\alpha(x)A) = (x,A).$$

また，$A \in p^{-1}(U_\alpha)$ に対し，

$$\psi_\alpha \circ \varphi_\alpha(A) = \psi_\alpha(p(A), s_\alpha(p(A))^{-1}A)$$
$$= s_\alpha(p(A))\, s_\alpha(p(A))^{-1}A$$
$$= A.$$

よって，φ_α は同相写像，とくに局所自明化を与える。

以上により，$p: O(n) \to S^{n-1} = O(n)/O(n-1)$ は，
ファイバーが $O(n-1)$ であるファイバー束。
（構造群も $O(n-1)$ であることは §3.7）。

$s_\alpha : U_\alpha \longrightarrow p^{-1}(U_\alpha)$ の由来は
次の Lem による。

Lem 3.6.45

G：群。
H：G の部分群。
$p: G \to G/H$；射影 とする。
写像 $s: G/H \longrightarrow G$ で，
$p \circ s = 1_{G/H}$ なるものに対し，$\varphi(g) = (p(g), s(p(g))^{-1}g)$
で定まる写像

$$\varphi: G \longrightarrow G/H \times H$$

は集合として全単射。また，G が位相群，
s が連続ならば，φ は同相写像。

☺ $\varphi : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G/H \times H \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ g & \longmapsto & (p(g),\ s(p(g))^{-1} g) \end{array}$ について.

$p : G \to G/H$ による単位元 e_G の像
$p(e_G) = e_G H$ を $[e_G]$ と表すと.

$$H = Iso_{[e_G]}(G) = \{ g \in G \mid g.[e_G] = [e_G] \}$$

$(G \curvearrowright G/H$ は. $\overline{\mu}(g, g'H) = \mu(g, g')H.)$

である. $g.[e_G]$ と $s(p(g)).[e_G]$ を比べると.

$$\begin{aligned} s(p(g)).[e_G] &= s(p(g))H \\ &= p(s(p(g))) \\ &= p(g) \\ &= gH \\ &= g.[e_G] \end{aligned}$$

$\therefore$ $s(p(g))^{-1} g.[e_G] = [e_G]$ より.

$$s(p(g))^{-1} g \in Iso_{[e_G]}(G) = H$$

ゆえに. φ は well-defined.

また,

$\psi : \begin{array}{ccc} G/H \times H & \longrightarrow & G \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (x, h) & \longmapsto & s(x)h \end{array}$

と定めると. ψ は φ の逆写像.

実際.

$$\varphi\circ\psi(x,h) = \varphi(s(x)h)$$
$$= \left(p(s(x)h),\ s(p(s(x)h))^{-1}s(x)h\right)$$

$$p(s(x)h) = (s(x)h)H$$
$$= s(x)H$$
$$= p(s(x))$$
$$= x$$

$$\therefore\ \varphi\circ\psi(x,h) = (x,h)$$

$$\psi\circ\varphi(g) = \psi\left(p(g),\ s(p(g))^{-1}g\right)$$
$$= s(p(g))\cdot s(p(g))^{-1}g$$
$$= g.$$

□

Def 3.6.46

連続写像 $p: E \to B$ に対し,
連続写像 $s: B \to E$ で

$$p\circ s = 1_B$$

であるものを, pの切断, あるいは断面 (cross section)
という.

Ref 3.6.47

$p : E \longrightarrow B$ を連続写像とする.

p が局所切断 (local cross section) を持つ、とは、
任意の $x \in B$ に対し、その開近傍 U_x と、
連続写像 $s_x : U_x \longrightarrow p^{-1}(U_x)$ で、

$$p \circ s_x = 1_{U_x}$$

となるものが存在すること、をいう.

Thm 3.6.48

G: 位相群
H: G の部分群 とする.

もし、射影 $p: G \longrightarrow G/H$ が
局所切断を持つなら、これは、ファイバーが H の
ファイバー束になる.

∵

$x \in G/H$ に対し、その開近傍 U_x と、
連続写像 $s_x : U_x \longrightarrow p^{-1}(U_x)$ で、

$$p \circ s_x = \mathrm{id}_{U_x}$$

となるものを考える. (仮定より、このような $\{s_x\}$ は存在する)

各 $x \in G/H$ に対し、

$$\begin{array}{cccc} \varphi_x : & p^{-1}(U_x) & \longrightarrow & U_x \times H \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & g & \longmapsto & (p(g),\ s_x(p(g))^{-1} g) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \psi_x : & U_x \times H & \longrightarrow & p^{-1}(U_x) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & (y, h) & \longmapsto & s_x(y) h \end{array}$$

を考える。(Lem 3.6.45) と同様にして、φ_x, ψ_x はともに連続で、互いに逆写像になっている。

ゆえに、φ_x は同相写像。(well-definedness も Lem 3.6.45)

よって、$p : G \to G/H$ は、ファイバーが H のファイバー束

(構造群が H であることは §3.7)。

$\square$

オマケ

例 3.6.31

$\mathbb{R}$ を加法により位相群とみなす
$\mathbb{Q}$ を $\mathbb{R}$ の部分群とみなす
このとき $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ は Hausdorff ではない。

㊟

任意の $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ の2点が開集合で分離できないことを示す。

$p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ を射影とする。

任意に $[x], [y] \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ をとる。
U を $[y]$ の任意の開近傍とする。
$y \in p^{-1}(U)$ より、$p^{-1}(U)$ は y の開近傍、だから
$\exists\, \delta > 0$ s.t. $(y-\delta, y+\delta) \subset p^{-1}(U)$

一方、有理数の稠密性により
$$y - x < r < y - x + \delta$$
となる有理数 $r \in \mathbb{Q}$ が存在。
$$y < x+r < y+\delta \quad (0 < x+r-y < \delta)$$
より、$|(x+r) - y| < \delta$
これは $x+r \in p^{-1}(U)$ を意味する。
よって、$p(x+r) = [x+r] = [x] \in U$ となり
どのような $[y]$ の開近傍 U をとってきても $[x], [y]$ を分離できない。□

問 3.6.32

G : 位相群

H : G の閉部分群

このとき、G/H は Hausdorff

∵

一般に、$x \in G$ の開近傍 U に対し、

e の開近傍 V で、

$$(*) \begin{cases} V^{-1} = V \\ V \cdot V \subset x^{-1} U \end{cases}$$

となるものがとれることを示す。

まず、μ が連続なので、

$$V' \times V' \subset \mu^{-1}(x^{-1} U)$$

となる、単位元の開近傍 V' がとれる。

このとき、$V = V' \cap (V')^{-1}$ とおけば、

(*) の2条件をみたす。

$p : G \longrightarrow G/H$; 射影 とし、

$p(g) \neq p(g')$ と仮定する。

このとき、$g^{-1}g' \notin H$ である。

H が閉集合 なので、$U \cap H = \phi$ となる $g^{-1}g'$ の

開近傍 U が存在。

このとき、 $e \in gU(g')^{-1}$

g や $(g')^{-1}$ をかける写像は同相写像なので、

$gU(g')^{-1}$ も G の開集合。

よって、前半で示したことにより、単位元の開近傍 V で、

$$\begin{cases} V \cdot V \subset gU(g')^{-1} \\ V^{-1} = V \end{cases}$$

をみたすものが存在。

このとき、 $g^{-1}(V \cdot V)g' \subset U$ となる。

$$\underset{(g^{-1}V).(Vg')}{\overset{\shortparallel}{}}$$

$V_1 := Vg,\quad V_2 := Vg'$ とおく。

これらはそれぞれ、 g, g' の開近傍になり、

$V_1^{-1}V_2 \subset U$ をみたす。

このとき、 $p(V_1) \cap p(V_2) = \phi$ かつ

$p(V_1),\ p(V_2)$ が G/H の開集合であることを示す。

ここで一般に、部分集合 $A \subset G$ に対し、

$$p^{-1}(p(A)) = AH = \bigcup_{h \in H} Ah.$$

なので、 A が開集合ならば、 $p(A)$ も開集合。

$p(V_1) \cap p(V_2) \neq \phi$ と仮定する.

このとき、$\exists x \in V_1, \exists y \in V_2$ s.t. $p(x) = p(y)$.

すると、$x^{-1}y \in H$ だが、一方で、

$V_1^{-1} V_2 \subset U$ より、$x^{-1}y \in U$.

つまり、$x^{-1}y \in U \cap H$ で、$H \cap U = \phi$ に矛盾.

$\therefore$ $p(V_1) \cap p(V_2) = \phi$

$\square$