

§ 3.6 群の作用による商空間

Def 3.6.1

群 G が位相空間 X に左作用しているとき.

X に同値関係 $\sim_G$ を次のように定める:

$$\left| \begin{array}{l} x, x' \in X \text{ に対し,} \\ x \sim_G x' \iff \exists g \in G \text{ s.t. } x' = g \cdot x \end{array} \right.$$

この同値関係による商空間 $X/\sim_G$ を X/G と表し.

この空間 X/G を X の G の作用による 商空間 (quotient space) という.

点 $x \in X$ が代表する X/G での同値類を.

x の G の作用による 軌道 (orbit) という.

命 3.6.2

$\sim_G$ は同値関係

①

(i) 単位元 $e \in G$ に対し. $x = e \cdot x$ かつ $x \sim_G x$.

(ii) $x \sim_G y$ かつ $x \neq y$. $\exists g \in G$ s.t. $y = g \cdot x$

$\therefore$ かつ. 両辺に $g^{-1} \in G$ を作用させる.

$$(\text{左辺}) = g^{-1} \cdot y$$

$$(\text{右辺}) = g^{-1} \cdot (g \cdot x)$$

$$= (g^{-1}g) \cdot x$$

$$= x$$

$\therefore x = g^{-1} \cdot y$ かつ. $y \sim_G x$.

(iii) $x \sim_G y$ かつ $y \sim_G z$ かつ.

$$\exists g_1 \in G \text{ s.t. } y = g_1 \cdot x$$

$$\exists g_2 \in G \text{ s.t. } z = g_2 \cdot y$$

$$\therefore z = g_2 \cdot (g_1 \cdot x) = (g_2 g_1) \cdot x \quad (g_2 g_1 \in G)$$

$$\therefore x \sim_G z.$$

□

Rem 3.6.4

$Gx := \{gx \mid g \in G\}$ と定義する.

これは $\sim_G$ に対する同値類, つまり x の軌道 である.

ゆえに, $X/G = \{Gx \mid x \in X\}$ と表わす.

例 3.6.7

$$X = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \quad \text{ユ.}$$

$$G = C_2 = \{1, -1\} \quad \text{ユ.}$$

C_2 の S^1 への作用を.

$$\begin{cases} 1 \cdot z = z \\ -1 \cdot z = -z \end{cases}$$

で定める. このとき, S^1/C_2 は どのような空間か??

単位元でない元 (-1) の作用に対し,

$z \in S^1$ は 原点 について 対称な点 $-z$ に移る.

よって,

$$S_+^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 = 1, \operatorname{Im} z > 0\}$$

$$S_-^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 = 1, \operatorname{Im} z < 0\}$$

ユ.

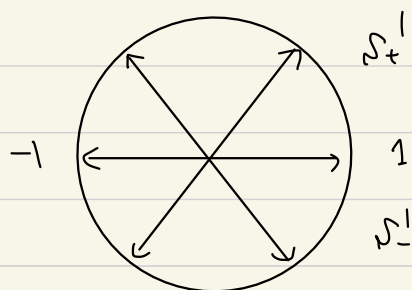
$$S^1 = S_+^1 \cup S_-^1 \cup \{1\} \cup \{-1\}$$

と 分割 される.

(-1) の作用に於て.

$$\begin{aligned} \sigma_+^1 &\longleftrightarrow \sigma_-^1 \\ \{1\} &\longleftrightarrow \{-1\} \end{aligned}$$

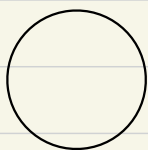
が互いに釣り合う.



}



}



Claim

$$\sqsubset \quad \mathcal{N}'/C_2 \cong \mathcal{N}'$$

①

写像 $f: \mathcal{N}'/C_2 \rightarrow \mathcal{N}'$

を

$$f([z]) = z^2$$

で定義.

f は 同相写像 であることを示す.

(i) f は well-defined

2 点 z, z' は 同値 $z \sim_{C_2} z'$ ならば,

$$z' = \pm z$$

$$\therefore f([z]) = z^2 = f([-z])$$

よって, f は well-defined.

(ii) f は 連続

$U \subset \mathcal{N}'$ は 開集合 であることを,

$f^{-1}(U)$ は $\mathcal{N}'/C_2$ 上の 開集合 であることを示す.

$$f^{-1}(f^{-1}(U)) \subset \mathcal{N}'$$

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \downarrow & \\ f^{-1}(U) \subset & \mathcal{N}'/C_2 & \xrightarrow[f]{G} \mathcal{N}' \supset U \end{array}$$

これは, $\gamma: S' \rightarrow S'/C_2$ として,

$p^{-1}(f^{-1}(U))$ には S' 中の内集合 があることを
示せばよい.

$$p^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ p)^{-1}(U).$$

$$\begin{array}{ccc} z \in S' & & \\ p \downarrow & \searrow & \\ [z] \in S'/C_2 & \xrightarrow{f} & S' \ni z^2 \end{array}$$

$$(f \circ p): S' \rightarrow S'$$

は

$$(f \circ p)(z) = z^2 \quad z \text{ 与 } z^2 \text{ について,}$$

これは連続. 故に $(f \circ p)^{-1}(U)$ は S' の内集合.
ゆえに, f は連続.

(iii) f は全単射

単射性

$[z], [z'] \in \mathbb{N}'/C_2$ に対し.

$f([z]) = f([z'])$ を仮定.

このとき, $z^2 = (z')^2$ となるので, $z' = \pm z$

より $z \sim_{C_2} z'$ となるので $[z] = [z']$

ゆえに f は単射

全射性

$w \in \mathbb{N}'$ をとる.

$0 \leq \theta < 2\pi$ に対し, $w = e^{i\theta}$ とかけるので,

$z = e^{\frac{i\theta}{2}}$ とおくと, $z \in \mathbb{N}'$ であり, かつ

$$f([z]) = w.$$

ゆえに f は全射.

(iv) f^{-1} は連続. (f は同相写像)

これは 次の (Lem 3.6.8) (Lem 3.6.10) に従う.

Lem 3.6.8

X : コンパクト

Y : Hausdorff の位相.

任意の連続写像

$$f: X \rightarrow Y$$

は 閉写像

①

$C \subset X$: 閉集合 とする.

コンパクト集合の閉集合はコンパクトなので.

C はコンパクト.

$f(C) \subset Y$ を考える.

連続写像によるコンパクト集合の像はコンパクトなので.

$f(C)$ はコンパクト

Y は Hausdorff である. Hausdorff 集合の

コンパクトな部分集合は 閉集合

ゆえに, $f(C)$ は Y の閉集合. となり

f は 閉写像.

Lem 3.6.10

X : 位相空間

$\sim$: X 上の同値関係 とする.

もし X がコンパクトなら, $X/\sim$ もコンパクト.

③

$p : X \rightarrow X/\sim$ は 商位相の定義から連続.

$p(X) = X/\sim$ ゆえ, X がコンパクトだから

$X/\sim$ もコンパクト.

Def 3.6.12

位相空間 X の Y への写像

$$f : X \rightarrow Y$$

は, 次の条件を満たすとき, 等化写像 (quotient map) とよばれる.

(1) f は 全射

(2) $V \subset Y$ に対し,

V が Y の 開集合

$\Leftrightarrow$

$f^{-1}(V)$ が X の 開集合.

Lem 3.6.13

$f: X \rightarrow Y$ π 等化写像 $\alpha \in \pi$.

X に 関係 $\sim_f$ $\in$.

$$x \sim_f x' \stackrel{\text{def}}{\iff} f(x) = f(x')$$

で π 定まる π . π は 同値関係 α あり

同相 $Y \cong X / \sim_f$ π あり.

Lem 3.6.14

次の可換図式 π . π は 等化写像 α 好:

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \pi \downarrow & \searrow f & \\ Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

このとき, 「 g π 連続」 $\iff$ 「 f π 連続」

高空間 $\mathcal{P}$ としても簡単になる場合 $\mathcal{P}$ がある.

Def 3.6.23

位相群 G が X に作用しているとする.

$$\forall x, y \in X, \quad \exists g \in G$$

$$\text{s.t.} \quad x = g \cdot y$$

のとき、この作用は 推移的 (transitive) であるという.

(G の作用が推移的 というのは、どの X の 2 点も
 G の作用で 互いに移り合うということ)

Lem (Cor 3.6.24)

G が X に推移的に作用するとき、

X/G は 1 点のみになる.

すなわち、 $\forall x \in X, \quad X = Gx$

Prop 3.6.25

G : 位相群

H : G の部分群

G の 積 $\mu: G \times G \rightarrow G$ を用いて
写像

$$\bar{\mu}: G \times G/H \longrightarrow G/H$$

を $\bar{\mu}(g, g'H) = \mu(g, g')H$ で定める.

もし, μ が連続ならば, これは推移的な作用となる.

($\Rightarrow$)

μ が連続でなければ, 位相群の作用とはならない.

μ が連続とすると, μ が作用なので, $\bar{\mu}$ も作用となる.

$$\forall g_1H, g_2H \in G/H, \quad g_2g_1^{-1} \in G$$

$$\bar{\mu}(g_2g_1^{-1}, g_1H) = \mu(g_2g_1^{-1}, g_1)H = g_2H$$

ゆえに, $\bar{\mu}$ は 推移的な作用

□

一般には, μ は連続かどうかわからない.

次の図式を見てください:

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{\mu} & G \\ \downarrow \text{id} \times \gamma & & \downarrow \gamma \\ G \times G/H & \xrightarrow{\bar{\mu}} & G/H \end{array}$$

$p \circ \mu$ は連続なので, $\text{id} \times \gamma$ は等化写像ならば,
(lem 3.6.14) より $\bar{\mu}$ も連続.

しかし一般には $p \circ \mu$ は等化写像ではない.

例) 3.6.27 (Munkres p143 Example 7)

$\mathbb{R}$ の部分集合 N は点 $\{0\}$ と同一視する同値関係を
 $\sim_N$ とし. 等化写像

$$p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\sim_N$$

を考える.

$$\text{このとき, } p \times \text{id}_{\mathbb{Q}}: \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}/\sim_N \times \mathbb{Q}$$

は等化写像ではない.

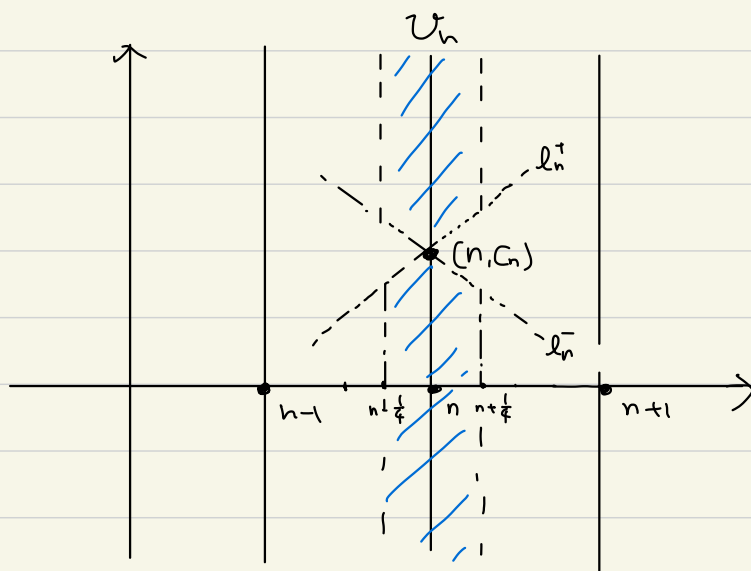
② 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, $C_n = \frac{\sqrt{2}}{n}$ とおく.

$\mathbb{R}^2$ 内の, 点 $(n, \frac{\sqrt{2}}{n})$ を通る傾き ± 1 の直線 l_n^+ , l_n^- を考える.

U_n を, $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ の点であって,

- $l_n^\pm$ のどちらともお上にあるか, 下にあるか, であって,
- $\begin{cases} x = n - \frac{1}{4} \\ x = n + \frac{1}{4} \end{cases}$ の間にある ような点

の集合とする.



すると, U_n は $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ の開集合となり, $C_n \notin \mathbb{Q}$ 也.

$\{n\} \times \mathbb{Q} \subset U_n$ となる.

$U := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ とおく. U は $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ の 開集合.

U は, 各 $q \in \mathbb{Q}$ について, $\mathbb{N} \times \{q\}$ を 含む" ので,
写像 $p \times \text{id}$ について saturated .

We say that a subset C of X is saturated
with respect to the surjective map $p: X \rightarrow Y$
if C contains every set $p^{-1}(\{y\})$ that it intersects.
 C is saturated if it equals to the complete
inverse image of a subset of Y .
($\exists U \subset Y$ s.t. $C = p^{-1}(U)$.)

$U' := (p \times \text{id})(U)$ とおく. (U : saturated 故) $U = (p \times \text{id})^{-1}(U')$
($p \times \text{id}$) が " 等化写像" なるは. U' は $\mathbb{R}/\sim_{\mathbb{N}} \times \mathbb{Q}$ の
開集合. (f : quotient $\Rightarrow$ " $f^{-1}(U)$ open $\Rightarrow U$ open")
 $\hookrightarrow$ したがって矛盾は導かれない.

$\mathbb{N} \times \{0\} \subset U$ 故) $(b, 0) \in U' \subset \mathbb{R}/\sim_{\mathbb{N}} \times \mathbb{Q}$.

$\left\{ \begin{array}{l} W : \mathbb{R}/\sim_{\mathbb{N}} \text{ 内の } \mathbb{Z}^n \text{ の } \{b\} \text{ の 開近傍} \\ I_\delta := \{y \in \mathbb{Q} \mid |y| < \delta\} \end{array} \right.$

とおく. $(b, 0) \in \mathbb{N} \times I_\delta \subset U'$ なる故.

$p^{-1}(W) \times I_\delta \subset U$

十分大きい $n \in \mathbb{N}$ をとることにする。 $\frac{\sqrt{\varepsilon}}{n} = C_n < \delta$ とおく。

$p^{-1}(W)$ は $\mathbb{R}$ の開集合で、 $\mathbb{N}$ を含んでいるので、
 $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ なる ε を取って、

$$(n - \varepsilon, n + \varepsilon) \subset p^{-1}(W)$$

とできる。

このとき、 $V := (n - \varepsilon, n + \varepsilon) \times I_\delta$ とおけば、

$$V \subset U \quad (\subset \mathbb{R} \times \mathbb{Q}) \quad \text{と成り立つ。}$$

い。い。 (図より) 明らかに $V \not\subset U$ と成り。

特に、 $x = n + \frac{1}{2}\varepsilon$, $|y - C_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$

と成る点 $(x, y) \in V$ について、 $(x, y) \notin U$

□

(Thm 3.6.28 の条件 (3) を満たす?)

少し条件を付けると、 $I_G \times p$ は 等化写像 と成り。

$$\bar{\mu}: G \times G/H \longrightarrow G/H$$

は 連続 と成る。

Thm 3.6.28 (小中巻 Thm 1.4)

$f: X \rightarrow Y$ を 等化写像 とす.

$f^{-1}(f(V)) = V$ を満たす 任意の開集合 $V \subset X$ と
任意の $x \in V$ に対し.

X の 開集合 U に対し, 次の条件を満たすものが存在すると
仮定:

- (1) $x \in U$
- (2) $U = f^{-1}(f(U))$
- (3) $\bar{U}$ は コンパクト かつ $\bar{U} \subset V$

このとき, 任意の 等化写像 $g: X' \rightarrow Y'$ に対し

$$f \times g: X \times X' \longrightarrow Y \times Y'$$

は 等化写像

①

$Y \times Y'$ の 部分集合 B に対し.

$$A = (f \times g)^{-1}(B)$$

を $X \times X'$ の 開集合 と 仮定 すると.

B が $Y \times Y'$ の 開集合 となること. 示す.

任意の $(y, y') \in B$ に対し, 次のを満たす

開集合 $U \subset X, U' \subset X'$ が存在すること. 示す:

f, g は等化写像より $Y \times Y'$ の開集合.

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad (y, y') \in f(U) \times g(U') \subset B \\ (ii) \quad f^{-1}f(U) = U, \quad g^{-1}g(U') = U' \end{array} \right. \quad - \textcircled{?}$$

$$x_0 \in f^{-1}(y), \quad x'_0 \in g^{-1}(y') \quad \text{とと.}$$

$$(X \times \{x'_0\}) \cap A = V \times \{x'_0\}$$

とかけば, V は X の開集合 である.

$$x_0 \in V = f^{-1}f(V)$$

だから,

定理 に述べた条件を満たす $U \subset X$ は存在する.

$$U' = \{x' \in X' \mid \overline{U} \times \{x'\} \subset A\}$$

とすると, $x'_0 \in U'$ である.

$$\overline{U} \times U' \subset A = (f \times g)^{-1}(B) \quad \text{である.}$$

$$(y, y') \in f(U) \times g(U') \subset B$$

つまり, (i) は成立する. 同様.

$$\begin{aligned} \overline{U} \times g^{-1}g(U') &\subset f^{-1}f(\overline{U}) \times g^{-1}g(U') \\ &= \tilde{h}^{-1}\tilde{h}(\overline{U} \times U') \quad (\tilde{h} = f \times g) \\ &\subset \tilde{h}^{-1}\tilde{h}(A) = A. \end{aligned}$$

↑
A の定義.

だから, $U' = \{x' \in X' \mid \bar{U} \times \{x'\} \subset A\}$

だから, $g^{-1}g(U') \subset U'$

一般に $U' \subset g^{-1}g(U')$ があるので, $g^{-1}g(U') = U'$
となり, (ii) が成立.

さらに, 任意の点 $x' \in U'$ に対し, 定義から,

$$\bar{U} \times \{x'\} \subset A$$

だから, 仮定より A は $X \times X'$ の閉集合

また, $\bar{U}$ がコンパクトだから,

$x' \in N$ で, $\bar{U} \times N \subset A$ を満たす閉集合

$N \subset X'$ が存在する. ?

よって U' は閉集合

Cor (16) 3.6.29

X : コンパクト, Y : Hausdorff とし.

$f : X \rightarrow Y$ を連続な全射とす.

このとき.

任意の 等化写像 $g : Z \rightarrow W$ に対し.

$$f \times g : X \times Z \rightarrow Y \times W$$

は 等化写像

(~!)

(i) f は 等化写像

f は 連続全射 かつ, (lem 3.6.8) より 閉写像

よて. $U \subset Y$ が open $\Leftrightarrow f^{-1}(U) \subset X$ が open.

(Def 3.6.12) より f は 等化写像.

(ii) $f^{-1}(f(V)) = V$ を示す. 任意の 開集合 $V \subset X$ と,
任意の $x \in V$ を考える.

Y は コンパクト Hausdorff 空間 なので
正規空間. よて,

(1) $x \in V$

(2) $U = f^{-1}(f(V))$

$$f(x) \in N \subset \overline{N} \subset f(V)$$

(3) $\overline{U} : \text{コンパクト}$

かつ $\overline{U} \subset V$

を示す. Y の 開集合 N が存在.

$U := f^{-1}(N)$ とおけば, (Thm 3.6.28) の条件を

示す. よて. $f \times g$ は 等化写像 となる

□

Cor (内) 3.6.30

X : 局所コンパクト Hausdorff とある.

このとき, 任意の 等化写像 $f: Y \rightarrow Z$ に対し.

$$I_X \times f : X \times Y \rightarrow X \times Z$$

は 等化写像

(i)

$\text{id}_X : X \rightarrow X$ μ^1 (Thm 3.6.28) の条件を満たす

これらの結果から,

- G μ^1 コンパクト とき G/H μ^1 Hausdorff
- G μ^1 局所コンパクト Hausdorff

好まば, G の G/H への作用は 連続.

さて, 推移的 群 の作用に話を戻す.

多くの場合, (Prop 3.6.25) の逆 μ^1 成立す.

つまり, たいの空間 X と 位相群 G に対し,

作用 が 推移的 好まば, X は G/H という形 で書ける.

Thm 3.6.33

G : σ -コンパクト位相群.

X : Hausdorff 空間 u.l.

$\mu : G \times X \rightarrow X$ が推移的な作用 u.l.

また, $x_0 \in X$ に対し.

$$H = \{g \in G \mid gx_0 = x_0\}$$

u.l.

このとき, 次の μ 成立.

(1) H は G の 閉部分群.

(2) $\bar{\varphi}(gH) = gx_0$ で定義される写像

$$\bar{\varphi} : G/H \rightarrow X$$

は 同相写像

(2) 図式

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{\mu} & X \\ \uparrow \bar{\mu} \times \bar{\varphi} & & \uparrow \bar{\varphi} \\ G \times G/H & \xrightarrow{\bar{\mu}} & G/H \end{array}$$

は可換. u.l.

$$\bar{\mu} : G \times G/H \rightarrow G/H$$

$$(g, g'H) \mapsto \mu(g, g')H$$

② (1) H は G の 内部部分群 であること

写像 $\varphi: G \rightarrow X$ を

$$\varphi(g) = gx_0$$

で定める.

$$\mu: G \times X \rightarrow X \quad ; \quad (g, x) \mapsto gx$$

は連続で、

$$\varphi = \mu|_{G \times \{x_0\}} \circ \iota \quad ; \quad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\iota} & G \times \{x_0\} \xrightarrow{\mu} X \\ g & \mapsto & (g, x_0) \mapsto gx_0 \end{array}$$

と書けるので φ も連続.

$$\text{また, } H = \varphi^{-1}(\{x_0\}) = \{g \in G \mid gx_0 = x_0\}$$

仮定によ X は Hausdorff だから $\{x_0\}$ は閉集合.

よて, H は G の 閉集合.

次に, $h, h' \in H$ とする.

$$(hh')x_0 = h(h'x_0) = hx_0 = x_0$$

$$\text{よて, } hh' \in H$$

$$h \in H \text{ に対し, } hx_0 = x_0 \text{ より}$$

$$h^{-1}x_0 = h^{-1}(hx_0) = (h^{-1}h)x_0 = e.x_0 = x_0$$

$$\text{よて } h^{-1} \in H$$

ゆえに, H は G の 内部部分群.

$$gH \xrightarrow{\quad} gx_0$$

(2) $\bar{\varphi} : G/H \longrightarrow X$ φ 同相 であること

(i) $\bar{\varphi}$ φ well-defined であること.

$gH = g'H$ である $(g \sim g')$ とき、

$g^{-1}g' \in H$ である。 $g^{-1}g' x_0 = x_0$.

$\therefore g x_0 = g' x_0$ となり $\bar{\varphi}(gH) = \bar{\varphi}(g'H)$.

よって、 $\bar{\varphi}$ は well-defined.

(逆にたゞは。 $\bar{\varphi}$ は単射であること φ 分かる)。

(ii) $\bar{\varphi}$ φ 全単射 であること

$\bar{\varphi}$ φ 単射 であることは述べたので。全射性を示す。
仮定より、 G の作用は推移的。

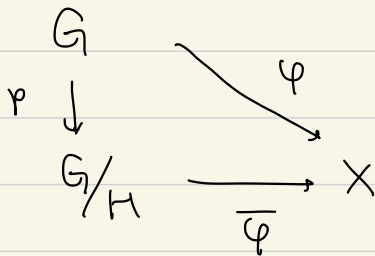
よって、 $\forall x \in X, \exists g \in G$ st. $g x_0 = x$

この $g \in G$ を用いて

$$\bar{\varphi}(gH) = g x_0 = x$$

よって、 $\bar{\varphi}$ は全単射。

(iii) $\bar{\varphi}$ が連続であること.



この図式が可換で、 φ が連続、 γ が等価写像。
なので、(Prop 3.6.14) より $\bar{\varphi}$ は連続。

(iv) $\bar{\varphi} : G/H \rightarrow X$ が同相写像であること.

$\bar{\varphi}$ が開写像であることを示せばよい。

仮定より、 X は Hausdorff

G はコンパクト なので、(Lem 3.6.10) より、

G/H もコンパクト。

さて、(Lem 3.6.8) より 連続写像

$$\bar{\varphi} : G/H \rightarrow X$$

は開写像。

$\bar{\varphi}$ は全単射だったので 同相写像。

$$\begin{array}{ccc}
 (3) & \begin{array}{c} (g, g'H) \\ \cap \\ G \times G/H \end{array} & \xrightarrow{\bar{\mu}} \begin{array}{c} (gg'H) \\ \cap \\ G/H \end{array} \\
 & \downarrow \text{Id} \times \bar{\varphi} & \downarrow \bar{\varphi} \\
 & \begin{array}{c} G \times X \\ \cap \\ (g, g'x_0) \end{array} & \xrightarrow{\mu} \begin{array}{c} X \\ \cap \\ (gg'x_0) \end{array}
 \end{array}$$

好んで可換

□

Def 3.6.35

(Thm 3.6.33) に現れた部分群

$$H = \{ g \in G \mid gx_0 = x_0 \}$$

を、 G の x_0 での 等方部分群 (isotropy subgroup)

としい。 $Is_{x_0}(G)$ や G_{x_0} と書く。

(x の固定化部分群, 安定化部分群 $Stab(x)$ ともいふ)

Def 3.6.3)

群 G の X の作用は.

すべての $x \in X$ に対し $\text{Iso}_n(G)$ が自明な群
となること. 自由な作用 (free action) と呼ばれる.

このこと. Gx が G の作用も含めて同視される.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\sim} & Gx \\ \downarrow & & \downarrow \\ g & \longmapsto & gx \end{array}$$

$$\left(g_1 x = g_2 x \Rightarrow g_1^{-1} g_2 x = x \Rightarrow g_1^{-1} g_2 = e \Rightarrow g_1 = g_2 \right)$$