§3.6 群の作用による商空間

Def 3.6.1

群 G が位相空間 X に左から作用しているとき.
X に同値関係 $\sim_G$ を 次のように定める:

$x, x' \in X$ に対し,
$$x \sim_G x' \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists g \in G \text{ s.t. } x' = g.x$$

この同値関係による商空間 $X/\sim_G$ を X/G と表し.
この空間 X/G を X の G の作用による商空間 という
(quotient space)

点 $x \in X$ が代表する X/G での同値類を.
x の G の作用による軌道 (orbit) という.

問 3.6.2

$\sim_G$ は同値関係

(i) 単位元 $e \in G$ により. $x = e.x$ なので $x \sim_G x$.

(ii) $x \sim_G y$ のとき。 $\exists g \in G$ s.t. $y = g.x$

このとき、両辺に $g^{-1} \in G$ を作用させると、

$$(\text{左辺}) = g^{-1}.y$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= g^{-1}.(g.x) \\ &= (g^{-1}g).x \\ &= x\end{aligned}$$

$\therefore$ $x = g^{-1}.y$ より、 $y \sim_G x$.

(iii) $x \sim_G y$ かつ $y \sim_G z$ のとき、

$\exists g_1 \in G$ s.t. $y = g_1.x$

$\exists g_2 \in G$ s.t. $z = g_2.y$

$\therefore$ $z = g_2.(g_1.x) = (g_2 g_1).x$ $(g_2 g_1 \in G)$

$\therefore$ $x \sim_G z$. $\square$

Rem 3.6.4

$Gx := \{gx \mid g \in G\}$ と定義すると、

これは $\sim_G$ による同値類、つまり x の軌道となる。

ゆえに、 $X/G = \{Gx \mid x \in X\}$ ともかける。

例 3.6.7

$X = S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$ とし、

$G = C_2 = \{ 1, -1 \}$ とする。

C_2 の S^1 への作用を、

$$\begin{cases} 1 . z = z \\ -1 . z = -z \end{cases}$$

で定める。このとき、S^1 / C_2 は どのような空間か??

単位元でない元 (-1) の作用により、

$z \in S^1$ は 原点について対称な点 $-z$ に移る。

よって、

$$S^1_+ := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 = 1, \ \mathrm{Im}\, z > 0 \}$$

$$S^1_- := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 = 1, \ \mathrm{Im}\, z < 0 \}$$

として、

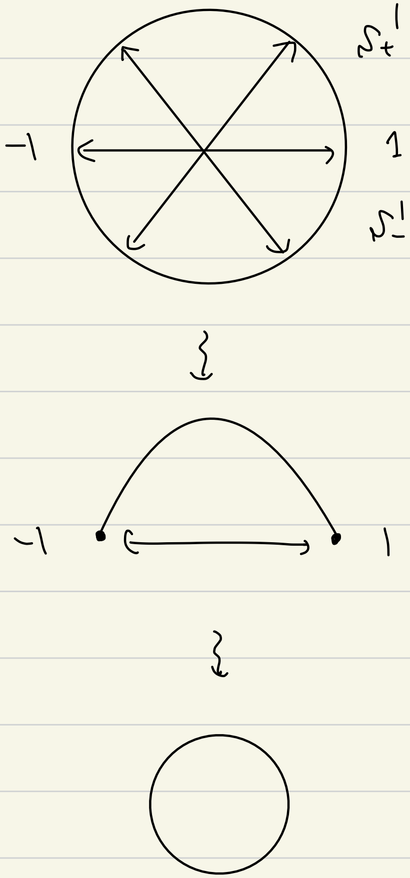
$$S^1 = S^1_+ \cup S^1_- \cup \{1\} \cup \{-1\}$$

と分割すると、

(-1) の作用により

$$S^1_+ \longleftrightarrow S^1_-$$
$$\{1\} \longleftrightarrow \{-1\}$$

が互いに移り合う.



Claim

$$S^1/C_2 \simeq S^1$$

$\because$

写像 $f : S^1/C_2 \longrightarrow S^1$

を、

$$f([z]) = z^2$$

で定義。

f が同相写像であることを示す。

(i) f は well-defined

2点 z, z' が同値 $z \sim_{C_2} z'$ ならば、

$$z' = \pm z$$

$$\therefore \quad f([z]) = z^2 = f([-z])$$

ゆえに、f は well-defined.

(ii) f は連続

$U \subset S^1$ が開集合であるとき、

$f^{-1}(U)$ が S^1/C_2 で開集合であることを示す。

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(f^{-1}(U)) \subset & S^1 \arrow[d, "p"'] \arrow[dr] & & \\
f^{-1}(U) \subset & S^1/C_2 \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & S^1 & \supset U
\end{tikzcd}$$

これは、 $p : S^1 \longrightarrow S^1/C_2$ として、

$p^{-1}(f^{-1}(U))$ が S^1 で閉集合であることを示せばよい。

$$p^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ p)^{-1}(U).$$

$$\begin{tikzcd} z \in S^1 \arrow[d, "p"'] \arrow[dr] & & \\ {[z]} \in S^1/C_2 \arrow[r, "f"'] & S^1 \ni z^2 \end{tikzcd}$$

$$(f \circ p) : S^1 \longrightarrow S^1$$

は

$(f \circ p)(z) = z^2$ で与えられている。

これは連続。なので $(f \circ p)^{-1}(U)$ は S^1 の閉集合。

ゆえに、 f は連続。

(iii) f は全単射

単射性

$[z], [z'] \in S^1/C_2$ に対し、

$f([z]) = f([z'])$ を仮定。

このとき、$z^2 = (z')^2$ なので、$z' = \pm z$

よって $z \sim_{C_2} z'$ なので $[z] = [z']$

ゆえに f は単射

全射性

$w \in S^1$ をとる。

$0 \leq \theta < 2\pi$ により、$w = e^{i\theta}$ とかけるので、

$z = e^{\frac{i\theta}{2}}$ とおくと、$z \in S^1$ であり、かつ

$f([z]) = w$.

ゆえに f は全射。

(iv) f^{-1} は連続。（f は同相写像）

これは次の (Lem 3.6.8) (Lem 3.6.10) より従う。

Lem 3.6.8

X : コンパクト

Y : Hausdorff のとき.

任意の連続写像

$$f : X \to Y$$

は閉写像

∵

$C \subset X$: 閉集合 とする.

コンパクト集合の閉集合はコンパクトなので,

C はコンパクト.

$f(C) \subset Y$ を考える.

連続写像によるコンパクト集合の像はコンパクトなので,

$f(C)$ はコンパクト

Y は Hausdorff で, Hausdorff 集合の

コンパクトな部分集合は閉集合

ゆえに, $f(C)$ は Y の閉集合. となり

f は閉写像. □

Lem 3.6.10

X : 位相空間

$\sim$: X 上の同値関係 とする.

もし X がコンパクトなら. $X/\sim$ もコンパクト.

㊟

$p : X \to X/\sim$ は商位相の定義から連続.

$p(X) = X/\sim$ ゆえ. X がコンパクトなことから

$X/\sim$ もコンパクト.

□

Def 3.6.12

位相空間の間の写像

$$f : X \to Y$$

は. 次の条件をみたすとき. 等化写像 (quotient map)

とよばれる

(1) f は全射

(2) $U \subset Y$ に対し.

U が Y の開集合

$\iff$

$f^{-1}(U)$ が X の開集合.

Lem 3.6.13

$f: X \to Y$ が等化写像のとき、
X に関係 $\sim_f$ を

$$x \sim_f x' \overset{\text{def}}{\iff} f(x) = f(x')$$

で定めると、これは同値関係であり
同相 $Y \cong X/\sim_f$ がある。

Lem 3.6.14

次の可換図式で、π は等化写像とする：

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright", shift right=3ex] & \\
Y \arrow[r, "g"'] & Z
\end{tikzcd}$$

このとき、「g が連続」$\iff$「f が連続」

商空間がとても簡単になる場合がある。

Def 3.6.23

位相群 G が X に作用しているとする.

$\forall x, y \in X, \quad \exists g \in G$

s.t. $\quad x = g.y$

のとき、この作用は推移的 (transitive) であるという.

(G の作用が推移的というのは、どの X の2点も G の作用で互いに移り合うということ)

Lem (Cor 3.6.24)

G が X に推移的に作用するなら、
X/G は1点のみからなる.
すなわち、$\forall x \in X, \quad X = Gx$

Prop 3.6.25

G: 位相群
H: Gの部分群

Gの積 $\mu: G\times G \to G$ を用いて
写像

$$\bar{\mu} : G \times G/H \longrightarrow G/H$$

を、$\bar{\mu}(g, g'H) = \mu(g, g')H$ で定める.
もし、$\bar{\mu}$ が連続ならば、これは推移的な作用となる.

$\because$

$\bar{\mu}$ が連続でなければ、位相群の作用とはならない.
$\bar{\mu}$ が連続とすると、μ が作用なので、$\bar{\mu}$ も作用となる.

$\forall g_1H, g_2H \in G/H,\quad g_2g_1^{-1} \in G$

$$\bar{\mu}(g_2g_1^{-1}, g_1H) = \mu(g_2g_1^{-1}, g_1)H = g_2H$$

ゆえに、$\bar{\mu}$ は推移的な作用

$\square$

一般には、$\bar{\mu}$ が連続かどうかは分からない。
次の図式を見てみる:

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{\mu} & G \\ {\scriptstyle 1_G \times p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ G \times G/H & \xrightarrow[\bar{\mu}]{} & G/H \end{array}$$

$p \circ \mu$ は連続なので、$1_G \times p$ が等化写像ならば、
(Lem 3.6.14) より $\bar{\mu}$ も連続。

ところが一般には $p \circ \mu$ は等化写像でない。

例 3.6.27 (Munkres p143 Example 7)

$\mathbb{R}$ の部分集合 $\mathbb{N}$ を点 $\{b\}$ と同一視する同値関係を $\sim_{\mathbb{N}}$ とし、等化写像

$$p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\sim_{\mathbb{N}}$$

を考える。
このとき、$p \times \mathrm{id}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}/\sim_{\mathbb{N}} \times \mathbb{Q}$
は等化写像でない。

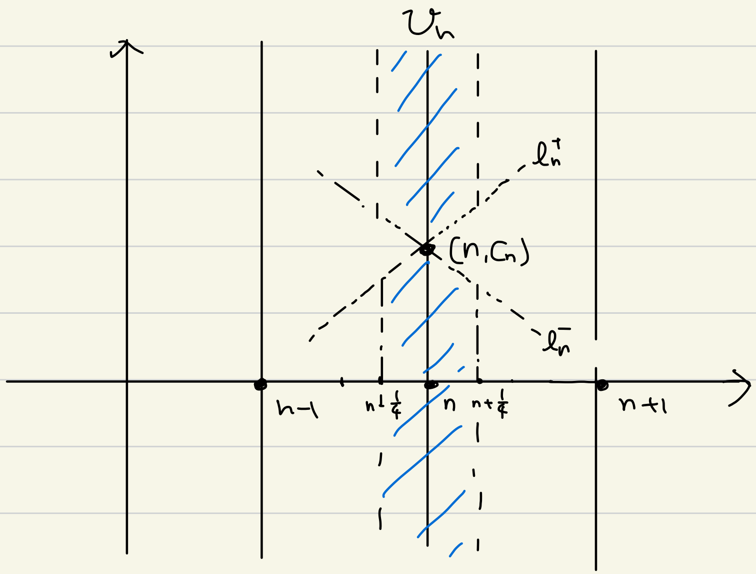
② 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し、 $c_n = \dfrac{\sqrt{2}}{n}$ とおく。

$\mathbb{R}^2$ 内の、点 $(n, \frac{\sqrt{2}}{n})$ を通る傾き ± 1 の直線 l_n^+, l_n^- を考える。

U_n を、$\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ の点であって、

- $l_n^{\pm}$ のどちらともより上にあるか、下にあるか、であって、
- $\begin{cases} x = n - \frac{1}{4} \\ x = n + \frac{1}{4} \end{cases}$ の間にあるような点

の集合とする。



すると、U_n は $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ の閉集合となり、$c_n \notin \mathbb{Q}$ より、

$\{n\} \times \mathbb{Q} \subset U_n$ となる。

$\mathcal{U} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ とおく。 $\mathcal{U}$ は $\mathbb{R}\times\mathbb{Q}$ の開集合。

$\mathcal{U}$ は、各 $q\in\mathbb{Q}$ について、 $\mathbb{N}\times\{q\}$ を含むので、
写像 $p\times id$ について saturated.

We say that a subset C of X is saturated with respect to the surjective map $p: X\to Y$ if C contains every set $p^{-1}(\{y\})$ that it intersects.
C is saturated if it equals to the complete inverse image of a subset of Y.
$(\exists U\subset Y$ s.t. $C = p^{-1}(U))$

$\mathcal{U}' := (p\times id)(\mathcal{U})$ とおく。 ($\mathcal{U}$: saturated より $\mathcal{U} = (p\times id)^{-1}(\mathcal{U}')$)
$(p\times id)$ が等化写像ならば、 $\mathcal{U}'$ は $\mathbb{R}/\sim_{\mathbb{N}}\times\mathbb{Q}$ の
開集合。 (f : quotient $\Rightarrow$ 「$f^{-1}(U)$ open $\Rightarrow$ U open」)
↳ ここから矛盾を導く。

$\mathbb{N}\times\{0\}\subset\mathcal{U}$ より $(b, 0)\in\mathcal{U}'\subset\mathbb{R}/\sim_{\mathbb{N}}\times\mathbb{Q}$.

$$\begin{cases} W : \mathbb{R}/\sim_{\mathbb{N}} \text{ 内での } \{b\} \text{ の開近傍} \\ I_\delta := \{y\in\mathbb{Q} \mid |y|<\delta\} \end{cases}$$

とおくと、 $(b, 0)\in W\times I_\delta\subset\mathcal{U}'$ なので、

$$p^{-1}(W)\times I_\delta \subset \mathcal{U}$$

十分大きい $n \in \mathbb{N}$ をとることで、$\frac{\sqrt{2}}{n} = c_n < \delta$ としてよい。

$p^{-1}(W)$ は $\mathbb{R}$ の開集合で、$\mathbb{N}$ を含んでいるので、

$0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ なる ε を取ってきて、

$$(n-\varepsilon, n+\varepsilon) \subset p^{-1}(W)$$

とできる。

このとき、$V := (n-\varepsilon, n+\varepsilon) \times I_\delta$ とおけば、

$$V \subset U \quad (\subset \mathbb{R} \times \mathbb{Q})$$ となるはずである。

しかし、(図より。) 明らかに $V \not\subset U$ となる。

特に、$x = n + \frac{1}{2}\varepsilon$, $|y - c_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$

となる点 $(x, y) \in V$ については、$(x, y) \notin U$

$\square$

(Thm 3.6.28 の条件(3)を落とした？)

少し条件を付けると、$1_G \times p$ は等化写像となり、

$$\bar{\mu} : G \times G/H \longrightarrow G/H$$

は連続となる。

Thm 3.6.28 (小中萱 Thm 1.4)

$f: X \to Y$ を 等化写像 とする.

$f^{-1}(f(V)) = V$ をみたす 任意の閉集合 $V \subset X$ と

任意の $x \in V$ に対し.

X の開集合 U で. 次の条件をみたすものが存在すると

仮定:

$$\begin{cases} (1) & x \in U \\ (2) & U = f^{-1}(f(U)) \\ (3) & \overline{U} \text{ はコンパクト かつ } \overline{U} \subset V \end{cases}$$

このとき. 任意の等化写像 $g: X' \to Y'$ に対し

$$f \times g : X \times X' \longrightarrow Y \times Y'$$

は 等化写像

(:)

$Y \times Y'$ の部分集合 B に対し.

$$A = (f \times g)^{-1}(B)$$

を $X \times X'$ の閉集合と仮定するとき.

B が $Y \times Y'$ の閉集合となること. すなわち.

任意の $(y, y') \in B$ に対し. 次をみたす

閉集合 $U \subset X$, $U' \subset X'$ が存在すること. を示す:

~~f, g が等化写像より、Y×Y′の開集合.~~

$$\begin{cases} \text{(i)} & (y,y') \in \overbrace{f(U)\times g(U')} \subset B \\ \text{(ii)} & f^{-1}f(U)=U,\quad g^{-1}g(U')=U' \end{cases} \quad \text{— ②}$$

⇒ $f(U)$, $g(U')$ がそれぞれ open になる.

$x_0 \in f^{-1}(y)$, $x_0' \in g^{-1}(y')$ として.

$$(X\times\{x_0'\}) \cap \underset{\bigcup_{\lambda,\mu}(U_\lambda\times U'_\mu)}{\underset{\shortparallel}{A}} = V \times \{x_0'\}$$

とおけば、V は X の開集合で、

$$x_0 \in V = f^{-1}f(V)$$ ← Aの定義より.

だから、

定理に述べた条件をみたす $U \subset X$ が存在する. — 特に $x_0\in U$

$$U' = \{x' \in X' \mid \overline{U}\times\{x'\} \subset A\}$$

↑ $\overline{U}\subset V$, $\overline{U}\times\{x_0'\}\subset V\times\{x_0'\} \subset A$

とおくと、$x_0' \in U'$ で、

$$\overline{U}\times U' \subset A = (f\times g)^{-1}(B)$$ だから、

$$(y,y') \in f(U)\times g(U') \subset B$$

つまり (i) が成立. また、

$$\begin{aligned} \overline{U}\times g^{-1}g(U') &\subset f^{-1}f(\overline{U})\times g^{-1}g(U') \\ &= \tilde{h}^{-1}\tilde{h}(\overline{U}\times U') \quad (\tilde{h}=f\times g) \\ &\subset \tilde{h}^{-1}\tilde{h}(A) = A. \end{aligned}$$

↑ Aの定め方.

$$\left(A = \tilde{h}^{-1}(B),\quad \tilde{h}(A)=B \qquad \tilde{h}^{-1}\tilde{h}(A) = \tilde{h}^{-1}(B) =: A \right)$$

だから，　$U' = \{x' \in X' \mid \overline{U} \times \{x'\} \subset A\}$

だったので，　$g^{-1}g(U') \subset U'$

一般に　$U' \subset g^{-1}g(U')$　なので，　$g^{-1}g(U') = U'$

となり，(ii) が成立．

さらに，任意の点 $x' \in U'$ に対し，定義から，

$$\overline{U} \times \{x'\} \subset A$$

だが，仮定より A は $X \times X'$ の閉集合

また，$\overline{U}$ がコンパクトだから，

$x' \in N$ で，$\overline{U} \times N \subset A$ をみたす開集合

$N \subset U'$ が存在する．

よって U' は開集合

□

∵　$X \times X'$ の中で $\overline{U} \times \{x'\}$ の開被覆

$$\overline{U} \times \{x'\} \subset \bigcup_{\lambda, \mu} (U_\lambda \times U'_\mu)$$ をとる．

$\overline{U} \times \{x'\}$: コンパクト より，$\exists \lambda_1, \cdots, \lambda_n$, $\exists \mu_1, \cdots, \mu_m$ s.t.

$$\overline{U} \times \{x'\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} (U_{\lambda_i} \times U'_{\mu_j})$$

$N := \bigcap_{j=1}^{m} U'_{\mu_j}$ とおくと，$x' \in N$, $\overline{U} \times N \subset A$

□

Cor (同) 3.6.29

> X : コンパクト, Y : Hausdorff とし,
> $f : X \to Y$ を連続な全射とする.
>
> このとき,
> 任意の等化写像 $g : Z \to W$ に対し,
> $$f \times g : X \times Z \longrightarrow Y \times W$$
> は等化写像

∵

(i) f は等化写像

f は連続全射かつ, (Lem 3.6.8) より閉写像

よって, $U \subset Y$ が open $\iff$ $f^{-1}(U) \subset X$ が open.

(Def 3.6.12) より f は等化写像.

(ii) $f^{-1}(f(V)) = V$ をみたす任意の開集合 $V \subset X$ と,

任意の $x \in V$ を考える.

Y はコンパクト Hausdorff 空間なので

正規空間. よって,

$$f(x) \in N \subset \overline{N} \subset f(V)$$

をみたす Y の開集合 N が存在.

(1) $x \in U$
(2) $U = f^{-1}(f(U))$
(3) $\overline{U}$: コンパクト
かつ $\overline{U} \subset V$

$U := f^{-1}(N)$ とすれば, (Thm 3.6.28) の条件をみたす. よって, $f \times g$ は等化写像となる

□

Cor (問) 3.6.30

X : 局所コンパクト Hausdorff とする.

このとき, 任意の等化写像 $f : Y \to Z$ に対し,

$1_X \times f : X \times Y \to X \times Z$

は等化写像

∵

$\mathrm{id}_X : X \to X$ が (Thm 3.6.28) の条件をみたす

□

これらの結果から,

- G がコンパクトで G/H が Hausdorff or
- G が局所コンパクト Hausdorff

ならば, G の G/H への作用は連続.

さて, 推移的な群の作用に話を戻す.

多くの場合, (Prop 3.6.25) の逆が成り立つ.

つまり, たいていの空間 X と位相群 G に対し,

作用が推移的ならば, X は G/H という形で書ける.

Thm 3.6.33

G : コンパクト位相群.
X : Hausdorff 空間 とし.
$\mu : G \times X \longrightarrow X$ が推移的な作用とする.

また. $x_0 \in X$ に対し.

$$H = \{ g \in G \mid g x_0 = x_0 \}$$

とおく.

このとき. 次が成立.

(1) H は G の閉部分群.

(2) $\overline{\varphi}(gH) = g x_0$ で定義される写像

$$\overline{\varphi} : G/H \longrightarrow X$$

は同相写像

(2) 図式

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "\mu"] & X \\ G \times G/H \arrow[u, "1_G \times \overline{\varphi}"] \arrow[r, "\overline{\mu}"] & G/H \arrow[u, "\overline{\varphi}"'] \end{tikzcd}$$

は可換. ここで.

$$\overline{\mu} : G \times G/H \longrightarrow G/H$$
$$(g, g'H) \longmapsto \mu(g, g')H$$

② (1) HがGの閉部分群であること

写像 $\varphi : G \longrightarrow X$ を

$$\varphi(g) = g x_0$$

で定める。

$$\mu : G \times X \to X \quad ; \quad (g, x) \mapsto gx$$

は連続で、

$$\varphi = \mu|_{G \times \{x_0\}} \circ \iota \quad : \quad \begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow[\sim]{\iota} & G \times \{x_0\} & \xrightarrow{\mu} & X \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & & & \\ g & \mapsto & (g, x_0) & \longmapsto & g.x_0 \end{array}$$

と書けるので φ も連続。

また、$H = \varphi^{-1}(\{x_0\}) = \{ g \in G \mid g x_0 = x_0 \}$

仮定により X は Hausdorff だから $\{x_0\}$ は閉集合。

よって、H は G の閉集合。

次に、$h, h' \in H$ とすると、

$$(hh')x_0 = h(h'x_0) = hx_0 = x_0$$

よって、$hh' \in H$

$h \in H$ に対し、$hx_0 = x_0$ より、

$$h^{-1}x_0 = h^{-1}(hx_0) = (h^{-1}h)x_0 = e.x_0 = x_0$$

よって $h^{-1} \in H$

ゆえに、H は G の閉部分群。

$gH \longmapsto gx_0$

(2) $\overline{\varphi} : G/H \longrightarrow X$ が同相であること

(i) $\overline{\varphi}$ が well-defined であること.

$gH = g'H$ とする $(g \sim g')$ と.

$g^{-1}g' \in H$ なので. $g^{-1}g' x_0 = x_0$.

$\therefore \; g x_0 = g' x_0$ より $\overline{\varphi}(gH) = \overline{\varphi}(g'H)$.

よって、$\overline{\varphi}$ は well-defined.

(逆にたどれば. $\overline{\varphi}$ は単射であることが分かる).

(ii) $\overline{\varphi}$ が全単射であること

$\overline{\varphi}$ が単射であることは述べたので. 全射性を示す.

仮定より. G の作用は推移的.

よって. $\forall x \in X, \; \exists g \in G$ s.t. $g x_0 = x$

この $g \in G$ を用いて

$$\overline{\varphi}(gH) = g x_0 = x$$

よって、$\overline{\varphi}$ は全単射.

(iii) $\overline{\varphi}$ が連続であること.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ G/H \arrow[r, "\overline{\varphi}"'] & X \end{tikzcd}$$

この図式が可換で、φ が連続、p が等化写像
なので、(Prop 3.6.14) より $\overline{\varphi}$ は連続.

(iv) $\overline{\varphi} : G/H \longrightarrow X$ が同相写像であること.

$\overline{\varphi}$ が閉写像であることを示せばよい.
仮定より、X は Hausdorff
G はコンパクトなので、(Lem 3.6.10) より、
G/H もコンパクト.

よって、(Lem 3.6.8) より 連続写像
$$\overline{\varphi} : G/H \longrightarrow X$$
は閉写像.

$\overline{\varphi}$ は全単射だったので同相写像.

(3)

$$\begin{tikzcd}
(g, g'H) \arrow[r, phantom, "\in"] & G \times G/H \arrow[r, "\overline{\mu}"] \arrow[d, "1_G \times \overline{\varphi}"'] & G/H \arrow[d, "\overline{\varphi}"] \arrow[r, phantom, "\ni"] & (gg')H \\
(g, g'x_0) \arrow[r, phantom, "\in"] & G \times X \arrow[r, "\mu"'] & X \arrow[r, phantom, "\ni"] & (gg')x_0
\end{tikzcd}$$

なので可換

□

Def 3.6.35

(Thm 3.6.33) に現れた部分群

$$H = \{ g \in G \mid g x_0 = x_0 \}$$

を、G の x_0 での等方部分群 (isotropy subgroup) といい、$\mathrm{Iso}_x(G)$ や G_x と書く。

(x の固定化部分群、安定化部分群 $\mathrm{Stab}(x)$ などとも)

Def 3.6.37

群 G の X への作用は、
すべての $x \in X$ に対し $\mathrm{Iso}_x(G)$ が自明な群
となるとき、自由な作用 (free action) とよばれる。

このとき、Gx が G と、作用も込めて同一視できる。

$$
\begin{array}{ccc}
G & \xrightarrow{\sim} & Gx \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
g & \longmapsto & gx
\end{array}
$$

$$\left(g_1 x = g_2 x \Rightarrow g_1^{-1} g_2 x = x \Rightarrow g_1^{-1} g_2 = e \Rightarrow g_1 = g_2 \right)$$