[$\tau : X \to Y = M/G$ がクレパント特異点解消であること]

$y \in Y = M/G$ をとる.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\tau"] & Y = M/G & M \arrow[l, "\pi"'] \\ & \rotatebox{90}{$\in$}\, y & \end{tikzcd}$$

$D^b(X)_y$: $D^b(X)$ の対象で、$\tau^{-1}(y)$ にサポートをもつもののなす
$D^b(X)$ の充満部分圏.

$D^b_G(M)_y$: $D^b_G(M)$ の対象で、$\pi^{-1}(y)$ にサポートをもつもののなす
$D^b_G(M)$ の充満部分圏

とおく. $\Phi : D^b(X) \simeq D^b_G(M)$ を制限することで、
$\Phi_y : D^b(X)_y \simeq D^b_G(M)_y$ を得る.

ω_M は $\pi^{-1}(y)$ の近傍で自明となる G-同変層だったので、
$D^b_G(M)_y$ は自明なセール関手を持つ.

ゆえに、$D^b(X)_y$ のセール関手も自明となる.

次の補題により、$\tau : X \to Y$ はクレパント。

Lem ([BKR, Lem 3.1])

上記の仮定のもとで、
Y は Gorenstein 代数多様体となり、かつ
$$\tau : X \longrightarrow Y$$
はクレパント解消。

(準備パートで示す)。

[M が quasi-projective の場合]

この場合，M が projective としたときの証明は，
コンパクトサポートを持つ objects に対してのみ適用できる．

$D^b(X)_c$ $\left(D^b_G(M)_c\right)$: $D^b(X)$ $\left(D^b_G(M)\right)$ の中で，support が proper な対象からなる充満部分圏．

Φ を $D^b(X)_c$ に制限した函手

$$\Phi_c : D^b(X)_c \longrightarrow D^b_G(M)_c$$

は圏同値である．

$$\Psi(-) := \left[p_* \circ q^!(-) \right]^G = \left[R\pi_{X*}\left(\omega_{Z/M} \overset{L}{\otimes} \pi_M^*(-) \right) \right]^G$$

$$\left(
\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\
X \arrow[dr] & & M \arrow[dl] \\
 & Y = M/G &
\end{tikzcd}
,\quad
\begin{tikzcd}
 & X \times M \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_M"] & \\
X & & M
\end{tikzcd}
\right)$$

と定めると，Ψ は Φ の右随伴となる．

$$\begin{cases} \Upsilon = [\mathbb{R}\pi_{X*}(\omega_{Z/M} \overset{L}{\otimes} \pi_M^*(-))]^G \\ \Phi \cong \mathbb{R}\pi_{M*}(\mathcal{O}_Z \overset{L}{\otimes} \pi_X^*(- \otimes \rho_0)) \end{cases}$$ より、

函手の合成 $\Upsilon \circ \Phi$ は、

$\exists Q \in D^b(X \times X)$, $\pi_i : X \times X \to X$ $(i=1,2)$

を用いて、

$$\Upsilon \circ \Phi = \mathbb{R}\pi_{2*}(Q \overset{L}{\otimes} \pi_1^*(-))$$

とかける。

Φ_C は圏同値で、$\mathcal{O}_x \in D^b(X)_C$ なので、

$\forall x \in X$, $\Upsilon\Phi(\mathcal{O}_x) = \mathcal{O}_x$.

つまり、
$$\begin{aligned} \Upsilon\Phi(\mathcal{O}_x) &= \mathbb{R}\pi_{2*}(Q \overset{L}{\otimes} \pi_1^*(\mathcal{O}_x)) \\ &= \mathbb{R}\pi_{2*}(Q|_{\{x\}\times X}) \\ &= \mathcal{O}_x \end{aligned}$$

よって、$\mathrm{Supp}(Q) \subset \Delta_X$ $(\subset X \times X)$, $\mathrm{rank}(Q) = 1$

つまり、

Q は $i : X \hookrightarrow X \times X$ によって、X 上の可逆層 L を push-forward したもの。

ゆえに、$\Upsilon \circ \Phi$ は L をテンソルする函手とみなせる。

Φ が fully-faithful であることを示すには、
$\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X$ を示せばよい。 ($\epsilon : id \xrightarrow{\sim} \Upsilon \circ \Phi$ となるので)

$$\Upsilon \circ \Phi(\mathcal{O}_X) = \mathcal{L}$$

なので、
自然変換 $\epsilon : id \longrightarrow \Upsilon \circ \Phi$ は、
$\forall x \in X$ について、次の可換図式を導く。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X & \xrightarrow{\epsilon(\mathcal{O}_X)} & \mathcal{L} \\ f \downarrow & & \downarrow \mathcal{L} \otimes f \\ \mathcal{O}_x & \xrightarrow[\epsilon(\mathcal{O}_x)]{} & \mathcal{O}_x \end{array}$$

ここで、 $f \neq 0$.
$\epsilon : id \to \Upsilon \circ \Phi$ は $D^b(X)_c$ に制限すれば同型になるので、
$\epsilon(\mathcal{O}_x)$ は同型。 ゆえに $\epsilon(\mathcal{O}_X)$ も同型。
$\therefore$ $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X$ より、 Φ は fully-faithful.

最後に、Φ が 圏同値 を与えることを示す.

$\forall E \in D^b_G(M)$, $\Upsilon(E) \cong 0 \Rightarrow E \cong 0$.

$(\Upsilon : D^b_G(M) \to D^b(X))$

を示せば、Φ は 圏同値 となる.

$\Upsilon(E) \cong 0$ と仮定する.

Φ と Υ が 互いに 随伴 であることから、

$B \cong \Phi(A)$ とかける $B \in D^b_G(M)$ に対して、

$$\mathrm{Hom}^i(B, E) \cong \mathrm{Hom}^i(A, \Upsilon(E)) \cong 0.$$

特に Φ は $D^b(X)_c$ 上では 圏同値 なので、

$\forall B \in D^b_G(M)_c$, $\forall i$, $\mathrm{Hom}^i(B, E) = 0$. (*)

$\Upsilon(E) \cong 0$ だが $E \not\cong 0$ と仮定する.

$D = G.m$ $(m \in M)$ を、$\mathrm{Supp}(E)$ に含まれる

G の 軌道 とする. $(\mathrm{Supp}(E) \subset M)$

$(E \in D^b_G(M)$ より、そのような D が 存在$)$

$i : D \hookrightarrow M$ を inclusion とする.

$i_* \dashv i^!$ により、非自明な

$$i_* i^!(E) \longrightarrow E$$

が存在。

つまり、$\mathrm{Hom}(i_* i^!(E), E) \neq 0$.

$i_* i^!(E) \in D^b_G(M)_c$ より (*) に矛盾。

$\therefore E \cong 0$ となり、Φ は圏同値 □