§3.5 ファイバー束と群の作用

ファイバー F への群の作用として $\mathrm{Homeo}(F)$ を考えよう.

まず, 群の作用の定義を、位相群の位相空間への作用に拡張しておく.

Def 3.5.1

G: 位相群

X: 位相空間. とする.

G の X への右からの作用とは, 連続写像

$$\mu : X \times G \longrightarrow X$$

であって, 次の条件をみたすもの:

(1) $\forall x \in X$, $\mu(x, e) = x$. つまり,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "1_X \times c_e"] \arrow[dr, bend right, "="'] & X \times G \arrow[d, "\mu"] \\ & X \end{tikzcd}$$

が可換となるもの. ただし,

$c_e : X \longrightarrow G$ は G の単位元 e への定値写像.

(2) $\forall g, h \in G,\ \forall x \in X,$

$$\mu(\mu(x,g), h) = \mu(x, gh)$$

つまり

$$\begin{tikzcd}
X \times G \times G \arrow[r, "\mu \times 1_G"] \arrow[d, "1_X \times \mu_G"'] & X \times G \arrow[d, "\mu"] \\
X \times G \arrow[r, "\mu"'] & X
\end{tikzcd}$$

が可換になる.

ここで, $\mu_G : G \times G \to G$ は G の積.

同様に左からの作用

$$G \times X \longrightarrow X$$

も定義される.

Rem 3.5.2

群の作用の定義に逆元は不要

なので, (Def 2.3.22) や (Def 3.5.1) は

そのまま位相モノイドに使える.

例 3.5.8

$G = O(n)$, $X = S^{n-1}$ とする.

$$O(n) \hookrightarrow GL_n(\mathbb{R})$$
$$S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$$

により.

$GL_n(\mathbb{R})$ の $\mathbb{R}^n$ への作用を制限する.

これにより. $O(n)$ の S^{n-1} への作用が定義される.

示すことは.

$$A \in O(n),\ v \in S^{n-1} \Longrightarrow Av \in S^{n-1}.$$

まず. $v \in S^{n-1}$ $\Longleftrightarrow$ $|v|^2 = 1$

$\Longleftrightarrow$ $(v, v) = 1$

$\Longleftrightarrow$ ${}^t v v = 1$

なので. $Av \in S^{n-1}$ を示すには.

$${}^t(Av)(Av) = 1$$

を示せばよい.

$$\begin{aligned} {}^t(Av)(Av) &= {}^t v\,({}^t A A)\,v \\ &= {}^t v\, I_n\, v \quad (\because A \in O(n)) \\ &= {}^t v v = 1 \end{aligned}$$

□

ここで使ったのは、次の事実。

Lem 3.5.9

> G を、位相空間 X に左から作用する位相群とし、その作用を
> $$\mu : G \times X \longrightarrow X$$
> とする。
> H を G の部分群、
> A を X の部分空間で、
> $$\mu(H \times A) \subset A$$
> であるとすると、
> $$\mu|_{H \times A} \text{ は } H \text{ の } A \text{ への作用.}$$

(略証)

$$\begin{array}{ccccccc}
(h_1, h_2, a) & \in & H \times H \times A & \xrightarrow{1_H \times \mu|_{H\times A}} & H \times A & \ni & (h_1, h_2 a) \\
& & \Big\downarrow \mu_H \times 1_A & & \Big\downarrow \mu|_{H\times A} & & \\
(h_1 h_2, a) & \in & H \times A & \xrightarrow[\mu|_{H\times A}]{} & A & \ni & h_1 . (h_2 a) \\
& & & & & \ni & (h_1 h_2) . a
\end{array}$$

$\mu|_{H\times A}(H \times A) \subset A$ より上の図式を考えることができ、μ が群の作用なので可換になる

□

$\mathrm{Map}(X,Y)=\{f:X\to Y \mid 連続\}$

$$\mathrm{Map}(X\times Y, Z) \underset{ad^{-1}}{\overset{ad}{\rightleftarrows}} \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y,Z))$$

一般の群の作用について、

$$\mu:\ G\times X \longrightarrow X$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, hook] & & \mathrm{Homeo}(F) \\ & U_\alpha\cap U_\beta \arrow[ul, "\Phi^{\alpha\beta}"] \arrow[ur] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] & \end{tikzcd}$$

という写像だから、その随伴

$$\begin{array}{rccl} ad(\mu):& G & \longrightarrow & \mathrm{Map}(X,X) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & g & \longmapsto & ad(\mu)(g)\ :\ x\mapsto \mu(g,x) \\ & & & \qquad\qquad\qquad\quad = g.x \end{array}$$

がとれる。

(Prop 2.4.4)で、(GとXの位相を考えないとき)

「XへのGの(左)作用」

と

$$「\begin{array}{rccl} ad(\mu):& G & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(X) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & g & \longmapsto & ad(\mu)(g) \end{array}」$$

が一対一対応にあることを見た。

位相を考慮すると、まず $ad(\mu)$ が $\mathrm{Homeo}(X)$ に値をとる。

$= \{f: X\to X \mid 同相写像\}$

↑

コンパクト開位相で

位相モノイドになっている。

Lem 3.5.14

G：位相群，　X：位相空間　とし．
$\mu: G \times X \longrightarrow X$ を G の X への作用とする．

このとき．μ の随伴

$$\mathrm{ad}(\mu) : G \longrightarrow \mathrm{Map}(X, X)$$

の像は．$\mathrm{Homeo}(X)$ に含まれる．

よって．$\mathrm{ad}(\mu)$ は．

$$\mathrm{ad}(\mu) : G \longrightarrow \mathrm{Homeo}(X)$$

という写像とみなせる．

(∵)

各 $g \in G$ に対し．$\mathrm{ad}(\mu)(g)$ が同相写像であることを示せばよい．

(Prop 2.4.4) の証明より．

$\mathrm{ad}(\mu)(g)$ と $\mathrm{ad}(\mu)(g^{-1})$ は互いに逆写像．

μ が連続なので．これらも連続．(Lem 3.4.2)

□

Lem 3.5.15

G : 位相空間 X に作用する位相群.
$\mu : G \times X \to X$; その作用 とする.

このとき.
$$\mathrm{ad}(\mu) : G \longrightarrow \mathrm{Homeo}(X)$$
は連続な準同型.

(証)

$\mathrm{Homeo}(X)$ は コンパクト開位相で 位相モノイドになっている.
μ が連続なので. (Lem 3.4.7) より. $\mathrm{ad}(\mu)$ は連続.
(Prop 2.4.4) の証明 から $\mathrm{ad}(\mu)$ は 準同型写像 □

$\mathrm{ad}(\mu)(g) \circ \mathrm{ad}(\mu)(h) = \mathrm{ad}(\mu)(gh)$

以上により. 作用 $G \times X \to X$ から
連続な準同型 $G \to \mathrm{Homeo}(X)$ ができた.

Q.
逆に. $G \to \mathrm{Homeo}(X)$ のような連続な準同型から
G の作用が作れるか?

Def 3.5.16

写像 $\varphi : X \longrightarrow \mathrm{Map}(Y, Z)$ に対し

$\mathrm{ad}^{-1}(\varphi) : X \times Y \longrightarrow Z$

を

$$\mathrm{ad}^{-1}(\varphi)(x, y) = \varphi(x)(y) \qquad (\in Z)$$

で定める.

(本当に $\mathrm{Map}(Y, Z)$ に値をとることは次の補題でたしかめる)

Rem 3.5.17

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{ad} : & \mathrm{Map}(X \times Y, Z) & \longrightarrow & \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y, Z)) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & \varphi & \longmapsto & \mathrm{ad}(\varphi) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{ad}^{-1} : & \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y, Z)) & \longrightarrow & \mathrm{Map}(X \times Y, Z) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & \varphi & \longmapsto & \mathrm{ad}^{-1}(\varphi) \end{array}$$

なので この記号を用いている (そして 随伴 adjoint の名を用いている)

Lem 3.5.18

Y が 局所コンパクト Hausdorff であるとき.

$$\varphi : X \longrightarrow \mathrm{Map}(Y, Z)$$

が連続 なら,

$$\mathrm{ad}^{-1}(\varphi) : X \times Y \longrightarrow Z$$

も 連続

∵

$U \subset Z$: 開集合 として.

$$(\mathrm{ad}^{-1}(\varphi))^{-1}(U) = \{(x, y) \in X \times Y \mid \varphi(x)(y) \in U\}$$

を考える. これが $X \times Y$ の 開集合 であればよい.

$(x_0, y_0) \in (\mathrm{ad}^{-1}(\varphi))^{-1}(U)$ に対し.

$\varphi(x_0) : Y \longrightarrow Z$ が連続 だから.

$\varphi(x_0)^{-1}(U)$ は Y の 開集合 であり. よって.

$Y \setminus \varphi(x_0)^{-1}(U)$ は y_0 を含まない Y の 閉集合.

← $\varphi(x_0)(y_0) \in U$ なので. $y_0 \in \varphi(x_0)^{-1}(U)$.

ここで. Y は 局所コンパクト Hausdorff だから正則

よって. y_0 の 開近傍 V で.

$$\overline{V} \cap (Y \setminus \varphi(x_0)^{-1}(U)) = \phi$$

つまり, $\varphi(x_0)(\overline{V}) \subset U$ となるものがとれる.

$\overline{V} \subset \varphi(x_0)^{-1}(U)$

また、Y が局所コンパクトだから、$\overline{V}$ はコンパクトと仮定してよい。

すると、

$\varphi^{-1}(W(\overline{V}, U)) \times V$ は (x_0, y_0) の周辺像であり、

$$\varphi^{-1}(W(\overline{V}, U)) \times V \subset (\mathrm{ad}^{-1}(\varphi))^{-1}(U)$$

ゆえに、$\mathrm{ad}^{-1}(\varphi)$ は連続。 □

$\left(\because\ \forall (x, y) \in \varphi^{-1}(W(\overline{V}, U)) \times V \text{ について、} \right.$

$\left. \varphi(x)(\overline{V}) \subset U \text{ より } \varphi(x)(y) \in U \quad \therefore (x, y) \in (\mathrm{ad}^{-1}(\varphi))^{-1}(U) \right)$

Cor 3.5.19

G : 位相群

X : 局所コンパクト Hausdorff 空間 とする。

$\varphi : G \longrightarrow \mathrm{Homeo}(X)$ が連続な準同型なら、

$$\mathrm{ad}(\varphi) : G \times X \longrightarrow X$$

は $G \curvearrowright X$ への(位相群としての)作用。(つまり連続)

② (Lem 3.5.18) より $ad^{-1}(\varphi)$ は連続.
なので. $ad^{-1}(\varphi)$ が作用の条件をみたしているかを確認する.

(i) $\forall x \in X$,

$$ad^{-1}(\varphi)(e_G, x) = \varphi(e_G)(x) = x$$

($\because$ φ が準同型なので, $\varphi(e_G) = id_X$)

(ii) $\forall g, h \in G$, $\forall x \in G$.

$$ad^{-1}(\varphi)(g, ad^{-1}(\varphi)(h, x)) = ad^{-1}(\varphi)(gh, x)$$

を示す.

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= ad^{-1}(\varphi)(g, \varphi(h)(x)) \\
&= \varphi(g)(\varphi(h)(x)) \\
&= (\varphi(g) \circ \varphi(h))(x) && (\varphi(g), \varphi(h) \in Homeo(X)) \\
&= \varphi(gh)(x) && (\because \varphi \text{ は準同型}) \\
&= ad^{-1}(\varphi)(gh, x) \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

OK

□

Cor 3.5.20

X : 局所コンパクト Hausdorff ならば、
Homeo(X) は X に連続に作用する。

∵

$$\mathrm{id}_{\mathrm{Homeo}(X)} : \mathrm{Homeo}(X) \to \mathrm{Homeo}(X)$$

は連続な準同型だから、φ として id をとることで、
上の系より Homeo(X) の X への作用を定める。□

以降、X が局所コンパクト Hausdorff のときは、

「位相群 G の X への連続な作用」

と

「連続な準同型 $G \to \mathrm{Homeo}(X)$」

を同一視する。

改めて、ファイバー束の構造群を定義しよう。
3.2 節の $G \hookrightarrow \mathrm{Homeo}(F)$ として連続なものを
考える。

Def 3.5.21（正確な構造群の定義）

G : 局所コンパクト Hausdorff 空間 F に連続に作用する位相群.

$G \longrightarrow \mathrm{Homeo}(F)$ をその作用によって定まる連続準同型とする

ファイバー束 (B, E, F) が G を構造群 (structure group) とする（Steenrod の意味での）ファイバー束であるとは.
$\{\Phi^{\alpha\beta}\}$ をその座標変換としたとき.
任意の α, β に対し.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr] & & \mathrm{Homeo}(F) \\
& U_\alpha \cap U_\beta \arrow[ul, dashed, "\exists \Phi^{\alpha\beta}"] \arrow[ur, "\Phi^{\alpha\beta}"'] &
\end{tikzcd}$$

が可換になるような連続写像 $\Phi^{\alpha\beta}$ が存在することをいう.

例 3.5.24

(例 3.1.11) の Hopf 束 $S^3 \xrightarrow{p} S^2$ が上述の意味で S^1 を構造群に持つファイバー束であることを見る.

p の局所自明化は次で与えられていた:

$$\begin{cases} U_+ := S^2 \setminus \{(1,0)\} \\ U_- := S^2 \setminus \{(-1,0)\} \end{cases}$$

として.

$$\varphi_+ : p^{-1}(U_+) \to U_+ \times S^1$$

$$\varphi_- : p^{-1}(U_-) \to U_- \times S^1$$

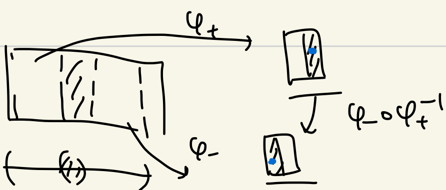
$$\varphi_+^{-1} : U_+ \times S^1 \to p^{-1}(U_+)$$

は.

$$\varphi_+(z_1, z_2) = \left(2|z_1|^2 - 1,\ 2z_1\bar{z}_2,\ \frac{z_2}{|z_2|}\right) \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{C})$$

$$\varphi_-(z_1, z_2) = \left(2|z_1|^2 - 1,\ 2z_1\bar{z}_2,\ \frac{z_1}{|z_1|}\right)$$

$$\varphi_+^{-1}(x, z, w) = \left(\frac{zw}{2\sqrt{\frac{1-x}{2}}},\ w\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right) \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R}. \\ z \in \mathbb{C}. \\ w \in S^1 \subset \mathbb{C} \end{cases}$$



よって、

$$\varphi_- \circ \varphi_+^{-1} : (U_+ \cap U_-) \times S^1 \longrightarrow (U_+ \cap U_-) \times S^1$$

は、

$$\varphi_- \circ \varphi_+^{-1}(x, z, w) = \varphi_-\left(\frac{zw}{2\sqrt{\frac{1-x}{2}}}, w\sqrt{\frac{1-x}{2}} \right)$$

$$= \left(2\frac{|zw|^2}{4\cdot\left(\frac{1-x}{2}\right)} - 1, \; 2\cdot\frac{zw}{2\sqrt{\frac{1-x}{2}}}\cdot\bar{w}\sqrt{\frac{1-x}{2}}, \; \frac{\frac{zw}{2\sqrt{\frac{1-x}{2}}}}{\left|\frac{zw}{2\sqrt{\frac{1-x}{2}}}\right|} \right)$$

$$= \left(\frac{|z|^2}{1-x} - 1, \; z, \; \frac{z}{|z|}w \right) \quad (x^2 + |z|^2 = 1) \quad (w \in S^1)$$

$$= \left(x, z, \frac{z}{|z|}w \right) \quad (z \in \mathbb{C})$$

$S^2 = \{ (x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} \mid x^2 + |z|^2 = 1 \}$

よって 座標変換

$$\Phi^{+-} : U_+ \cap U_- \longrightarrow \mathrm{Homeo}(S^1)$$

は、 $\Phi^{+-}(x, z)(w) = \dfrac{z}{|z|}w$ で与えられる。 $(w \in S^1)$

ここで、 $\dfrac{z}{|z|} \in S^1$ である。

よって、

写像 $\Phi^{+-} : U_+ \cap U_- \longrightarrow S^1$ を

$$\Phi^{+-}(x, z) = \frac{z}{|z|}$$

で定めれば、次の図式は可換となる。

$$\left\{ \Phi^{+-}(x,z) : w \mapsto \frac{z}{|z|} w \right\}$$

$$\begin{tikzcd}
\frac{z}{|z|} \in S^1 \arrow[rr, hook, "\mathrm{ad}(\mu)"] & & \mathrm{Homeo}(S^1) \\
& U_+ \cap U_- \ni (x,z) \arrow[ul, "\Phi^{+-}"] \arrow[ur, "\Phi^{+-}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\mathrm{ad}(\mu)\left(\frac{z}{|z|}\right)(w) = \mu\left(\frac{z}{|z|}, w\right) = \frac{z}{|z|} w$$

ここで、$\mathrm{ad}(\mu) : S^1 \longrightarrow \mathrm{Homeo}(S^1)$ は

S^1 の積による S^1 自身への作用から定まる準同型。

よって、Hopf束の構造群は S^1 ($\subset \mathrm{Homeo}(S^1)$ より小さい)

□

§3.2 の冒頭のように「ファイバー束が自明束を貼り合わせて得られる」と考えると …

Def 3.5.31

位相空間 X と X における同値関係 $\sim$ に対し、商集合 $X/\sim$ の位相 $\mathcal{O}$ を、

$$\mathcal{O} = \{ U \subset X/\sim \mid \pi^{-1}(U) \text{ が } X \text{ で開} \}$$

で定義する。ここで、

$$\begin{array}{cccc} \pi : & X & \longrightarrow & X/\sim \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & [x] \end{array}$$

は射影。

この π を商写像または等化写像 (quotient map) という。

この位相を持った $X/\sim$ を X の同値関係 $\sim$ による商空間 (quotient space) という。

位相 $\mathcal{O}$ を商位相または等化位相 (quotient topology) という。

この概念を用いると、B の open covering $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ と、
写像の集合 $\{\varphi^{\alpha\alpha'} : U_\alpha \cap U_{\alpha'} \to G\}_{\alpha,\alpha'\in A}$
が与えられたとき、
これらを使って $\{U_\alpha \times F\}$ たちを貼り合わせて
B 上のファイバー束を得る方法は、次のようになる。

Thm 3.5.32

G : 位相群 とし、
G が位相空間 F 局所コンパクトHausdorff に左から作用しているとする。
また、位相空間 B の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ と、
写像の集合

$$\{\Phi^{\alpha\alpha'} : U_\alpha \cap U_{\alpha'} \longrightarrow G\}_{\alpha,\alpha'\in A}$$

で、
次の条件をみたすものが与えられているとする。

(1) $\Phi^{\alpha\alpha}$ は単位元への定値写像

(2) $\forall x \in U_\alpha \cap U_{\alpha'}$, $\Phi^{\alpha'\alpha}(x) = \Phi^{\alpha\alpha'}(x)^{-1}$ $(\in G)$

(3) $\forall x \in U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2} \cap U_{\alpha_3}$

$$\Phi^{\alpha_2\alpha_3}(x)\,\Phi^{\alpha_1\alpha_2}(x) = \Phi^{\alpha_1\alpha_3}(x)$$

このとき、$\coprod_{\alpha \in A} (U_\alpha \times F)$ 上の同値関係 $\sim$ を次で定める：

$(x, y) \in U_\alpha \times F$ と $(x', y') \in U_{\alpha'} \times F$ に対し、

$$(x, y) \sim (x', y') \iff x = x' \text{ かつ } \Phi^{\alpha\alpha'}(x) y = y'.$$

そして、その商空間を、

$$E = \left(\coprod_{\alpha \in A} U_\alpha \times F \right) \Big/ \sim$$

とし、

写像 $p : E \longrightarrow B$ を

$$p([x, y]) = x$$

で定義すると、

これはファイバー F, 構造群 G, 座標変換 $\{\Phi^{\alpha\alpha'}\}_{\alpha\alpha' \in A}$ のファイバー束となる。

$\blacksquare$

準備 - 問 3.5.34

位相空間 X 上の 同値関係 $\sim$ が与えられているとし，

$$p : X \longrightarrow X/\sim$$

を商写像とする.

連続写像 $f : X \to Y$ が

$$x \sim x' \Rightarrow f(x) = f(x')$$

をみたすならば， $\bar{f}([x]) = f(x)$ により

$$\bar{f} : X/\sim \longrightarrow Y$$

は 連続写像 になる.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X/\sim \arrow[r, "\bar{f}"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \end{tikzcd}$$

(?)

$$x \sim x' \Rightarrow f(x) = f(x')$$ なので，

$$\bar{f}([x]) = f(x) = f(x') = \bar{f}([x'])$$

よって， $\bar{f}$ は well-defined.

$U \subset Y$ を Y の開集合とする. f が連続なので

$f^{-1}(U)$ は X の開集合.

定義より $f = \bar{f} \circ p$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X/\sim \arrow[r, "\bar{f}"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \end{tikzcd}$$

$$f^{-1} = p^{-1} \circ \bar{f}^{-1}$$ となり,

$$f^{-1}(U) = p^{-1}(\bar{f}^{-1}(U))$$

これが X の開集合なので, $X/\sim$ の商位相の定義から
$\bar{f}^{-1}(U)$ は $X/\sim$ の開集合.
ゆえに, $\bar{f} : X/\sim \to Y$ は連続写像 □

[Proof of Prop. 3.5.32]

p の連続性は, 次の図式より分かる:

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{\alpha\in A}\{U_\alpha \times F\} \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "pr_1"] & \\
E \arrow[r, "p"'] & B
\end{tikzcd}$$

これに, 命 3.5.34 を用いればよい.

次に, 局所自明化 をつくる.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{p} & B \\ \cup & & \cup \\ p^{-1}(U_\alpha) & & U_\alpha \end{array}$$

点 $e \in E$ について、$p(e) \in U_\alpha$ となる $\alpha \in A$ を選べば、
同値関係の定義より、

$$e = [(p(e), g)]$$

となる $g \in F$ が一意的に定まる。
この対応により、全単射

$$\varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times F$$

が得られる。

直積位相の定義より、これが連続であることを示すには、
それぞれの射影との合成

$$pr_1 \circ \varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \quad \cdots ①$$
$$pr_2 \circ \varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to F \quad \cdots ②$$

が連続であることを示せばよい。

① は p の制限と一致するので、p が連続なことから連続。

② は、 $pr_2 \circ \varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow F$ において、

$V \subset F$: F の開集合 に対し、

$(pr_2 \circ \varphi_\alpha)^{-1}(V)$ が $p^{-1}(U_\alpha)$ の開集合

であることを示せばよい。 等化位相の定義より、

$$\pi : \coprod_{\alpha \in A} (U_\alpha \times F) \longrightarrow E$$

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{\alpha \in A} (U_\alpha \times F) \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "pr_1"] & \\
E \arrow[r, "p"'] & B
\end{tikzcd}$$

$(pr_2 \circ \varphi_\alpha)^{-1}(V) \subset E = (\coprod / \sim)$

$V \subset F$

を射影としたとき、

$\pi^{-1}\left((pr_2 \circ \varphi_\alpha)^{-1}(V) \right)$ が $\coprod_{\beta \in A} (U_\beta \times F)$ で開

を示せばよい。

$x \in U_\alpha \cap U_\beta$ に対し

$\Phi^{\beta\alpha}(x)^{-1}(V)$

$$\pi^{-1}\left((pr_2 \circ \varphi_\alpha)^{-1}(V) \right) = \coprod_{\substack{\beta \in A \\ U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset}} \left((U_\alpha \cap U_\beta) \times \Phi^{\beta\alpha}(V) \right)$$

であり、$\Phi^{\beta\alpha}$ が同相写像であることから、右辺は開集合。

よって、p はファイバーが F のファイバー束。

同値関係の定め方から、座標変換は $\Phi^{\alpha\alpha'}$ たちで与えられる。

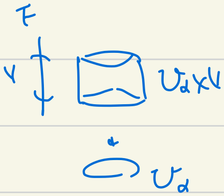
$(x, y) \sim (x', y')$

$\Longleftrightarrow x = x'$ かつ $\Phi^{\alpha\alpha'}(x) y = y'$.

□

[最後の部分が少し不明瞭]

$$\begin{array}{ccccccc}
 & E & e & \longmapsto & (p(e), y_e) & \longmapsto & y_e \\
 & \cup & \cap & & \cap & & \\
pr_2 \circ \varphi_\alpha : & & p^{-1}(U_\alpha) & \overset{\varphi_\alpha}{\xrightarrow{\sim}} & U_\alpha \times F & \xrightarrow{pr_2} & F \\
 & & \cup & & & & \cup \\
 & & (pr_2 \circ \varphi_\alpha)^{-1}(V) & \to & U_\alpha \times V & \to & V \\
 & & \| & & \| & & \\
 & & \varphi_\alpha^{-1}(pr_2^{-1}(V)) & & pr_2^{-1}(V) & &
\end{array}$$



$$\pi \uparrow \qquad \coprod_{\alpha \in A} (U_\alpha \times F)$$

$$\cup$$

$$\pi^{-1}((pr_2 \circ \varphi_\alpha)^{-1}(V)) = \coprod_{\beta \in A} (U_\alpha \cap U_\beta) \times \Phi^{\alpha\beta}(p((pr_2 \circ \varphi_\alpha)^{-1}(V)))^{-1}(V)$$

$$= \coprod_{\beta \in A} (U_\alpha \cap U_\beta) \times \Phi^{\beta\alpha}(p((pr_2 \circ \varphi_\alpha)^{-1}(V)))(V)$$

?

$$\left(\coprod_{\beta \in A} (U_\alpha \cap U_\beta)\right) \times \left(\coprod_{x \in U_\alpha \cap U_\beta} (\Phi^{\alpha\beta}(x))^{-1}(V)\right)$$

$$\coprod_{\substack{\beta \in A \\ U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi}} \left(\coprod_{x \in U_\alpha \cap U_\beta} (\Phi^{\alpha\beta}(x))^{-1}(V)\right)$$

$$\{x\} \times (\Phi^{\alpha\beta}(x))^{-1}(V)$$

$$\coprod_{\substack{\beta \in A \\ U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi}} \left(\coprod_{x \in U_\alpha \cap U_\beta} \{x\} \times (\Phi^{\alpha\beta}(x))^{-1}(V)\right)$$