[Thm 6.26 Main Theorem の証明]

(M が Projective な場合)

$$
\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\
(\text{G-Hilb}(M) \supset) \; X \arrow[dr, "\tau"'] & & M \arrow[dl, "\pi"] \\
 & Y = M/G &
\end{tikzcd}
$$

$$\pi_M : X \times M \longrightarrow M$$

$$\pi_X : X \times M \longrightarrow X$$

$\mathbb{R}f_* E \overset{\mathbb{L}}{\otimes} F$

$\simeq \mathbb{R}f_*(E \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathbb{L}f^* F)$

とする.

埋め込み $Z \overset{i}{\hookrightarrow} X \times M$ に射影公式を使って,

$$\Phi \cong \mathbb{R}\pi_{M*}\left(\mathcal{O}_Z \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \pi_X^*(- \otimes \rho_0)\right)$$

が成り立つ.

(∵)

$$
\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, bend right, "p"'] \arrow[d, hook, "i"] \arrow[dr, bend left, "q"] & \\
 & X \times M \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_M"] & \\
X & & M
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
\Phi &:= \mathbb{R}q_* \circ p^*(- \otimes \rho_0) \\
&= \mathbb{R}(\pi_M \circ i)_* \circ (\pi_X \circ i)^*(- \otimes \rho_0) \\
&\cong \mathbb{R}\pi_{M*} \circ \mathbb{R}i_* \left(i^* \circ \pi_X^*(- \otimes \rho_0)\right) \\
&\cong \mathbb{R}\pi_{M*}\left(\mathbb{R}i_*\left(\mathcal{O}_Z \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathbb{L}i^* \pi_X^*(- \otimes \rho_0)\right)\right) \\
&\cong \mathbb{R}\pi_{M*}\left(\mathbb{R}i_* \mathcal{O}_Z \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \pi_X^*(- \otimes \rho_0)\right) \\
&\cong \mathbb{R}\pi_{M*}\left(\mathcal{O}_Z \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \pi_X^*(- \otimes \rho_0)\right)
\end{aligned}
$$

Projection formula

$i : Z \hookrightarrow X \times M$ 埋め込み.

任意の $x \in X$ に対し、埋め込み

$$i_x : x \times M \hookrightarrow X \times M$$

を考えると、$\mathcal{Z}$ は X 上平坦だったから (∵ universal subscheme)

$$\mathbb{L}i_x^* \mathcal{O}_\mathcal{Z} \cong i_x^* \mathcal{O}_\mathcal{Z} \quad \in D^b(M)$$

(∵ M が正則スキームならば、任意の $\mathcal{F}^\bullet \in D^b(M)$ は局所自由層 $\mathcal{G}^i$ からなる有界複体 $\mathcal{G}^\bullet \in D^b(M)$ に同型.)

M は非特異なので、$\forall m \in M$ に対し、埋め込み

$$i_m : m \hookrightarrow M$$

を考えると、$\mathbb{L}i_m^* \mathbb{L}i_x^* \mathcal{O}_\mathcal{Z}$ も完全複体.

従って、

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{X \times M}(\mathcal{O}_\mathcal{Z}, \mathcal{O}_{(x,m)}) \cong \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{L}i_m^* \mathbb{L}i_x^* \mathcal{O}_\mathcal{Z}, \mathcal{O}_{(x,m)})$$

は $D^b(\mathrm{Vect}(\mathbb{C}))$ の対象となり、(Lem 6.16) より、

$\mathcal{O}_\mathcal{Z}, \mathcal{O}_\mathcal{Z}^\vee$ のホモロジカル次元は有限となる.

完全複体

$$P := \mathcal{O}_Z^\vee \otimes \pi_M^* \omega_M [n]$$

に対し、
函手 Φ^L を、

$$\Phi^L := \left[\mathbb{R}\pi_{X*} \left(P \overset{L}{\otimes} \pi_M^* (-) \right) \right]^G : D_G^b(M) \to D^b(X)$$

で定める。
ここで、 $\pi_M^! (-) := \pi_X^* (-) \otimes \pi_X^* (\omega_M) [n]$ とおくと、

$\pi_M^* \dashv \mathbb{R}\pi_{M*}$, $\mathbb{R}\pi_{X*} \dashv \pi_X^!$, $(-) \overset{L}{\otimes} \mathcal{O}_Z^\vee \dashv (-) \overset{L}{\otimes} \mathcal{O}_Z$
$[-]^G \dashv (-) \otimes \rho_0$

なので、 Φ^L が Φ の 左随伴 であることが分かる。 $(\Phi^L \dashv \Phi)$

$\because$ $\mathrm{Hom}(\Phi^L(E), F)$ $\quad (E \in D_G^b(M),\ F \in D^b(X))$

$= \mathrm{Hom}\left([\mathbb{R}\pi_{X*}(P \overset{L}{\otimes} \pi_M^*(E))]^G, F \right)$

$\cong \mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}\pi_{X*}(P \overset{L}{\otimes} \pi_M^*(E)), F \otimes \rho_0 \right)$

$\cong \mathrm{Hom}\left(P \overset{L}{\otimes} \pi_M^*(E), \pi_X^!(F \otimes \rho_0) \right)$

$\cong \mathrm{Hom}\left((\mathcal{O}_Z^\vee \overset{L}{\otimes} \pi_M^* \omega_M[n]) \overset{L}{\otimes} \pi_M^*(E), \pi_X^*(F \otimes \rho_0) \otimes (\pi_M^*(\omega_M)[n]) \right)$

$\cong \mathrm{Hom}\left(\mathcal{O}_Z^\vee \overset{L}{\otimes} \pi_M^*(E), \pi_X^*(F \otimes \rho_0) \right)$

$\cong \mathrm{Hom}\left(\pi_M^*(E), \mathcal{O}_Z \overset{L}{\otimes} \pi_X^*(F \otimes \rho_0) \right)$

$\cong \mathrm{Hom}\left(E, \mathbb{R}\pi_{M*}(\mathcal{O}_Z \overset{L}{\otimes} \pi_X^*(F \otimes \rho_0)) \right) = \mathrm{Hom}(E, \Phi(F))$ ∎

もし X が滑らかなら、$\Omega = \{ \mathcal{O}_x \mid x \in X \}$ は
$D^b(X)$ のスパニングクラス (例3.11)。

また、(Lem 3.14) により、$D^b_G(M)$ は直既約
今、M は射影的であると仮定しているので、X も射影的。

もし X が滑らかなら、$D^b(X)$, $D^b_G(M)$ はともに Serre関手
を持つ。それが分かれば、次の (Thm 3.15) (Thm 3.18) より
圏同値が示せる。

Thm 3.15

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を三角圏とする。
$\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を三角圏の間の三角関手とし、
左随伴 Φ^L, 右随伴 Φ^R を持つとする。
Ω を $\mathcal{C}$ のスパニングクラスとし、
「$\forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega$, $\forall i \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{Hom}^i_{\mathcal{C}}(\omega_1, \omega_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^i_{\mathcal{D}}(\Phi(\omega_1), \Phi(\omega_2))$$」

$\Rightarrow$ Φ は忠満忠実

Thm 3.18

$\mathcal{C}$: 非自明な三角圏
$\mathcal{D}$: 直既約な三角圏 とする.
$\mathcal{C}$ のスパニングクラスを Ω として.
$\forall \omega \in \Omega$,
$$\Phi \circ S_{\mathcal{C}}(\omega) = S_{\mathcal{D}} \circ \Phi(\omega)$$

が成り立つとき. Φ は三角圏の同値を与える.

$\Phi(\mathcal{O}_x) \cong \mathcal{O}_{Z_x}$ なので. 示すべきことは.

(i) X が非特異であること.

(ii) 自然な写像
$$\mathrm{Ext}^i_X(\mathcal{O}_{x_1}, \mathcal{O}_{x_2}) \longrightarrow G\text{-}\mathrm{Ext}^i_M(\mathcal{O}_{Z_{x_1}}, \mathcal{O}_{Z_{x_2}})$$
が同型であること.

(iii) $\forall x \in X$ に対し. G-同変層として.
$$\mathcal{O}_{Z_x} \cong \mathcal{O}_{Z_x} \otimes \omega_M$$

$\Phi^L \circ \Phi$ を Fourier-Mukai 函手 として みたとき.
その 積分核 を $Q \in D^b(X \times X)$ とおく.

埋め込み

$$i_x : x \times X \hookrightarrow X \times X$$

に対し.

$$\begin{cases} \mathbb{L} i_x^* Q \cong \Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_x) \\ \mathbb{R} i_{x_1 *} \mathcal{O}_{x_2} \cong \mathcal{O}_{x_1 \times x_2} \end{cases}$$

なので.

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}^i_{X \times X}(Q, \mathcal{O}_{x_1 \times x_2}) &\overset{(随伴)}{\cong} \mathrm{Hom}^i_X(\Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_{x_1}), \mathcal{O}_{x_2}) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{D^G(M)}(\Phi(\mathcal{O}_{x_1}), \Phi(\mathcal{O}_{x_2})) \\ &\cong G\text{-}\mathrm{Ext}^i_M(\mathcal{O}_{Z_{x_1}}, \mathcal{O}_{Z_{x_2}}) \end{aligned}$$

Z_1, Z_2 を M の G-クラスター とする.

G-クラスターの定義.

$$\mathrm{Hom}_M(\mathcal{O}_{Z_1}, \mathcal{O}_{Z_1}) \cong H^0(M, \mathcal{O}_{Z_1}) \cong \mathbb{C}[G]$$

G の 作用で 不変 となるような 元

$$\sum_{g \in G} \lambda_g g \in \mathbb{C}[G]$$

は. $\lambda_g \in \mathbb{C}$ が g の とり方に よらないもの. である.

$$\sum_{g \in G} \lambda \cdot g = \lambda \cdot \sum_{g \in G} g = \lambda \cdot (g_1 + \cdots + g_{|G|}), \quad \lambda \in \mathbb{C} \text{ は } G\text{-不変}.$$

よって、 $G\text{-}\mathrm{Hom}_M(\mathcal{O}_{Z_1}, \mathcal{O}_{Z_1}) = \mathbb{C}$

また、$\mathcal{O}_{Z_i}$ は $\mathcal{O}_M$-加群 として、上記のような
$\mathbb{C}[G]$ の元 で 0 でないもの、(により) 生成される。

$H^0(M, \mathcal{O}_{Z_i}) \cong \mathbb{C}[G]$

以上から、

$$G\text{-}\mathrm{Hom}_M(\mathcal{O}_{Z_1}, \mathcal{O}_{Z_2}) = \begin{cases} \mathbb{C} & (Z_1 = Z_2) \\ 0 & (Z_1 \neq Z_2) \end{cases}$$

? ($\dim Z_1 = \dim Z_2 = 0$ で言えるが…)

$x_1 \neq x_2 \in X$ に対し、Serre 双対性より

(ω_M が 局所的に 自明な G-同変層だったので)

$$G\text{-}\mathrm{Ext}^n_M(\mathcal{O}_{Z_{x_1}}, \mathcal{O}_{Z_{x_2}}) = G\text{-}\mathrm{Hom}_M(\mathcal{O}_{Z_{x_2}}, \mathcal{O}_{Z_{x_1}})^\vee = 0.$$

($x_1, x_2 \in X$ ($\subset G\text{-}\mathrm{Hilb}(M)$) で、$x_1 \neq x_2 \Rightarrow Z_{x_1} \neq Z_{x_2}$)

よって、 $i \notin [1, n-1]$ で $G\text{-}\mathrm{Ext}^i_M(\mathcal{O}_{Z_{x_1}}, \mathcal{O}_{Z_{x_2}}) = 0.$

これと、(Lem 6.16) で $j = 1$, $s = n-2$ として、

$$\mathrm{hom.dim}\, \mathcal{Q}\big|_{X \times X \setminus \Delta_X} \leq n-2.$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & X \times_Y X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
X \arrow[dr, "\tau"'] & & X \arrow[dl, "\tau"] \\
 & Y = M/G &
\end{tikzcd}$$

次に、 $x_1 \neq x_2 \in X$ であって、 $\tau(x_1) \neq \tau(x_2)$ が成り立つものをとる。

このとき、 $Z_{x_1} \cap Z_{x_2} = \phi$ なので、任意の $i \in \mathbb{Z}$ で、

$$\mathcal{H}om^i_{X\times X}(Q, \mathcal{O}_{x_1 \times x_2}) \cong G\text{-}\mathrm{Ext}^i_M(\mathcal{O}_{Z_{x_1}}, \mathcal{O}_{Z_{x_2}}) = 0.$$

?

よって、 $\mathrm{Supp}(Q|_{(X\times X)\setminus \Delta_X}) \subset X \times_Y X$

一方、仮定より、

$$\mathrm{codim}\,(X \times_Y X) > n-2$$

$\dim X \times_Y X \leq n+1$ が仮定。

$$\left(\mathrm{codim}_{(X\times X)} X \times_Y X \geq 2n - (n+1) = n-1 > n-2 \right)$$

(Cor 6.14) より、

$$Q|_{X\times X \setminus \Delta_X} \cong 0$$

つまり、 $\mathrm{Supp}(Q) = \Delta_X$ なので、 $x \in X$ に対し、

$$\mathrm{Supp}(\Phi' \circ \Phi(\mathcal{O}_x)) = \mathrm{Supp}\,\Phi^Q(\mathcal{O}_x) = x$$

← (Cor 6.15) の条件.

以下, $\mathcal{H}^0(\Phi^L\circ\Phi(\mathcal{O}_x)) = \mathcal{O}_x$ を示す.

(6.7) (6.8) から, 0 でない射

$$\Phi^L\circ\Phi(\mathcal{O}_x) \longrightarrow \mathcal{O}_x$$

が 定数倍 を 除けば 唯一つ 存在.

$$\left(\begin{aligned}&\mathrm{Hom}(\Phi^L\circ\Phi(\mathcal{O}_x),\mathcal{O}_x)\\ &\cong G\text{-}\mathrm{Ext}^i_M(\mathcal{O}_{Z_x},\mathcal{O}_{Z_x})\\ &\cong \mathbb{C}\end{aligned}\right)$$

この 射 から 得られる 完全三角

$$C \to \Phi^L\circ\Phi(\mathcal{O}_x) \to \mathcal{O}_x \to C[1]$$

に対し, $\mathrm{Hom}_X(-,\mathcal{O}_x)$ を 施し,

$$\cdots\to \mathrm{Hom}_X(\mathcal{O}_x,\mathcal{O}_x) \to G\text{-}\mathrm{Hom}_M(\Phi(\mathcal{O}_x),\Phi(\mathcal{O}_x)) \to \mathrm{Hom}_X(C,\mathcal{O}_x)$$

$$\to \mathrm{Hom}^1_X(\mathcal{O}_x,\mathcal{O}_x) \xrightarrow{\eta} G\text{-}\mathrm{Hom}^1_M(\Phi(\mathcal{O}_x),\Phi(\mathcal{O}_x)) \to \cdots$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$$

$$G\text{-}\mathrm{Hom}^1_M(\mathcal{O}_{Z_x},\mathcal{O}_{Z_x})$$

を得る.

$$\eta : \mathrm{Hom}^1_X(\mathcal{O}_x,\mathcal{O}_x) \longrightarrow G\text{-}\mathrm{Hom}^1_M(\mathcal{O}_{Z_x},\mathcal{O}_{Z_x})$$

は

$$\eta : T_xX \longrightarrow G\text{-}\mathrm{Ext}^1_M(\mathcal{O}_{Z_x},\mathcal{O}_{Z_x})$$

と 表すことができ. これは, クラスターの族 $\{\mathcal{O}_{Z_x}\}$ に関する Kodaira-Spencer 写像 である. よって, (Thm 5.33) の証明により 単射.

(同型?)

$\mathrm{Hom}^0_X(\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_x) \to G\text{-}\mathrm{Hom}_M(\Phi(\mathcal{O}_x), \Phi(\mathcal{O}_x))$

$\cong \mathbb{C}$ 全射(?)

よって. $\forall i \leq 0$, $\mathrm{Hom}^i_X(C, \mathcal{O}_x) = 0$.

スペクトル系列 ($\mathcal{A}$: 一般の三角圏, $E, F \in \mathrm{Ob}(D^b(\mathcal{A}))$)

$$E_2^{p,q} = \bigoplus_i \mathrm{Ext}^p_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}^i(E), \mathcal{H}^{i+q}(F)) \Rightarrow \mathrm{Hom}^{p+q}_{D^b(\mathcal{A})}(C, \mathcal{O}_x). \quad (3.6)$$

に, $E = C$, $F = \mathcal{O}_x$ とおいて. ($\mathcal{A} = \mathrm{Coh}(X)$)

$$E_2^{p,q} = \bigoplus_i \mathrm{Ext}^p_{\mathrm{Coh}(X)}(\mathcal{H}^i(C), \mathcal{H}^{i+q}(\mathcal{O}_x)) \Rightarrow \mathrm{Hom}^{p+q}_{D^b(\mathcal{A})}(C, \mathcal{O}_x)$$

$p+q \leq 0$ なる (p,q) に対し. $\mathrm{Ext}^p(\mathcal{H}^i(C), \mathcal{H}^{i+q}(\mathcal{O}_x)) = 0$.

$q = -i$, $p \leq i$ として. $\mathrm{Ext}^p(\mathcal{H}^i(C), \mathcal{H}^0(\mathcal{O}_x)) = 0$.

よって. $\forall i \geq 0$, $\mathcal{H}^i(C) = 0$.

完全三角より

$$0 \to \cancel{H^0(C)} \to H^0(\Phi \circ \Phi(\mathcal{O}_x)) \to H^0(\mathcal{O}_x)$$
$$\to \cancel{H^1(C)} \to \cdots$$

$$\therefore \quad \mathcal{H}^0(\Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_x)) \cong \mathcal{H}^0(\mathcal{O}_x) = \mathcal{O}_x.$$

(6.9) より、 もし $x \neq x'$ なら、

$$\forall i, \quad \mathrm{Hom}^i_X(\Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_x), \mathcal{O}_{x'}) = 0$$

また、 $\Phi(\mathcal{O}_x) \cong \mathcal{O}_{Z_x} \in \mathrm{Coh}_G(M)$ だから、

($G\text{-}\mathrm{Hom}^i_M(\mathcal{O}_{Z_x}, \mathcal{O}_{Z_x})$ を考えるので)

$i \notin [0, n]$, $x = x'$ のときも この式は 成立.

これらにより、 (Cor 6.15) が適用でき、 X は x で非特異。

さらに、 $\Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_x) \cong \mathcal{O}_x$ となるため、 次は同型.

$$\mathrm{Ext}^i_X(\mathcal{O}_{x_1}, \mathcal{O}_{x_2}) \xrightarrow{\sim} G\text{-}\mathrm{Ext}^i_M(\mathcal{O}_{Z_{x_1}}, \mathcal{O}_{Z_{x_2}})$$

$$\left(\because \ \mathrm{Ext}^i_X(\mathcal{O}_{x_1}, \mathcal{O}_{x_2}) \cong \mathrm{Ext}^i_X(\Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_{x_1}), \mathcal{O}_{x_2}) \cong \mathrm{Ext}^i_M(\Phi(\mathcal{O}_{x_1}), \Phi(\mathcal{O}_{x_2})) \cong G\text{-}\mathrm{Ext}^i_M(\mathcal{O}_{Z_{x_1}}, \mathcal{O}_{Z_{x_2}}). \right)$$

また、 ω_M が G-同変層として局所自明なので、

$$\mathcal{O}_{Z_x} \cong \mathcal{O}_{Z_x} \otimes \omega_M.$$

ゆえに、 (M が projective を仮定したとき) Φ は圏同値 □