

§ 3.4 コンパクト 単位相

$\text{Homeo}(F)$ に 次の (1) (2) を満たす位相を λ したい

(1) $\Phi^{\alpha\beta}$ が連続 になる. ($\Phi^{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Homeo}(F)$)

(2) $\text{Homeo}(F)$ が写像の合成で 位相群になる.

条件 (1) について 写像 $\Phi^\beta(x): F \rightarrow F$ は、合成

$$(U_\alpha \cap U_\beta) \times F \xrightarrow{\varphi_\alpha^{-1}} p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \xrightarrow{\varphi_\beta} (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \xrightarrow{pr_2} F$$

を 考え. $\Phi^\beta(x)(y) = pr_2 \circ \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, y)$

と 定義 していた. より 一般 に 次の 構成 を 考える.

Def 3.4.1

写像 $\varphi: X \times Y \longrightarrow Z$

が 与 え ら れ て い る と し. $x \in X$ を 固定 し. 写像

$$\text{ad}(\varphi)(x): Y \rightarrow Z$$

を

$$\text{ad}(\varphi)(x)(y) = \varphi(x, y)$$

と 定義 する.

Lem 3.4.2

$\varphi: X \times Y \longrightarrow Z$ は連続 好す.

任意の $x \in X$ に対し.

$$\text{ad}(\varphi)(x): Y \longrightarrow Z$$

も連続

(i)

$\text{ad}(\varphi)(x)$ は Y の各点 y で連続. であらばよい.

つまり, $\text{ad}(\varphi)(x)(y) \in Z$ の任意の開近傍 U に対し.

y の 開近傍 V で, $\text{ad}(\varphi)(x)(V) \subset U$

であるものが 存在 する.

ここで, $\text{ad}(\varphi)(x)(y) = \varphi(x, y)$ である.

$\varphi(x, y) \in U$ かつ φ の連続性から.

(x, y) の $X \times Y$ での 開近傍 $W \times V$ で.

$\varphi(W \times V) \subset U$ であるものが 存在.

(ここで, 直積位相の定義より, (x, y) の 開近傍 として,
 x, y それぞれの 近傍 の 直積 によって 与えられる.)

ある.

$$\text{ad}(\varphi)(x)(V) = \varphi(\{x\} \times V) \subset \varphi(W \times V) \subset U.$$

Def 3.4.3

位相空間 X, Y に対し,

$$\text{Map}(X, Y) = \{ f : X \rightarrow Y \mid \text{連続} \}$$

と定義する. これを用いて, (lem 3.4.2) は,

$$\lceil \varphi : X \times Y \longrightarrow Z \text{ が連続} \rceil$$

$$\Rightarrow \lceil \forall x \in X, \text{ad}(\varphi)(x) \in \text{Map}(Y, Z) \rceil$$

よって, 写像

$$\begin{array}{ccc} \text{ad}(\varphi) & : & X \longrightarrow \text{Map}(Y, Z) \\ \omega & & \omega \\ x & \longmapsto & \text{ad}(\varphi)(x) \end{array}$$

が定義される. これは φ の 随伴 (adjoint) といふ.

ファイバー束の座標変換

$$\Phi^\beta : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \text{Homeo}(F)$$

は, 合成,

$$(U_\alpha \cap U_\beta) \times F \xrightarrow{\varphi_\alpha^{-1}} p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \xrightarrow{\varphi_\beta} (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \xrightarrow{p_\alpha} F$$

の随伴

$$\Phi^{\alpha\beta} = \text{ad}(p_\alpha \circ \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \text{Map}(F, F)$$

である.

そこで、より一般に、連続写像

$$\varphi: X \times Y \longrightarrow Z$$

に対し、

$$\text{ad}(\varphi): X \longrightarrow \text{Map}(Y, Z)$$

が連続になるように $\text{Map}(Y, Z)$ に位相を入れる。

Def 3.4.4 (コンパクト開位相)

X, Y : 位相空間.

部分空間 $K \subset X$, $U \subset Y$ に対し、

$$W(K, U) = \{ f: X \rightarrow Y \mid \text{連続}, f(K) \subset U \}$$

とおく。

$$\mathcal{B} = \{ W(K, U) \mid K \subset X: \text{コンパクト}, U \subset Y: \text{開集合} \}$$

とし、

$\mathcal{B}$ を開集合の準基底 として $\text{Map}(X, Y)$ に位相を入れる。つまり、コンパクト集合 $K \subset X$, 開集合 $U \subset Y$ に対し、

$W(K, U)$ という形の部分集合から、

(1) 有限個の共通部分をとる。

(2) (1) で得た集合の任意の和集合をとる。

という操作により得た集合を開集合とする位相を考慮。

これを、 $\text{Map}(X, Y)$ の コンパクト開位相 と言う。

(compact-open topology)

Lemma 3.4.7

$\text{Map}(Y, Z)$ にコンパクト (南) 位相 τ を与える。

$\varphi: X \times Y \rightarrow Z$ が連続ならば、その随伴

$$\text{ad}(\varphi): X \rightarrow \text{Map}(Y, Z)$$

も連続

(7)

任意の $x \in X$ に対し、 $\text{ad}(\varphi)$ が x において連続であることを示す。

$\text{ad}(\varphi)(x) \in \text{Map}(Y, Z)$ の (南) 近傍 W に対し、

$$\text{ad}(\varphi)(V) \subset W$$

となる x の (南) 近傍 V を見つけねばよい。

コンパクト (南) 位相の定義から、 W は Y のコンパクト集合 C と Z の (南) 集合 $\mathcal{U}$ により、 $W(C, \mathcal{U})$ という形で書けている場合を示せばよい。

つまり、

$$\text{ad}(\varphi)(x) \in W(C, \mathcal{U}) \quad \text{のとき、}$$

$$\text{ad}(\varphi)(V) \subset W(C, \mathcal{U})$$

となる x の (南) 近傍 V を見つけねばよい。

$$\alpha(\varphi)(x) \in W(C, U) \neq \emptyset,$$

$$\alpha(\varphi)(x)(C) \subset U \quad (\because W(C, U) \text{ の定義}).$$

つまり,

$$\varphi(\{x\} \times C) \subset U$$

よって,

$$\forall y \in C, \quad \varphi(x, y) \in U.$$

よって φ の連続性より U は open であることが示される。

$\exists V_y : x$ の近傍, $\exists W_y : y$ の近傍

s.t.

$$\varphi(V_y \times W_y) \subset U.$$

y に
依存する。

$$C \subset \bigcup_{y \in C} W_y \quad \text{であり,}$$

C はコンパクトであることが示される。

$$\exists (y_1, \dots, y_n) \quad \text{s.t.} \quad C \subset W_{y_1} \cup \dots \cup W_{y_n}$$

$$\xi \in U, \quad V = \bigcap_{i=1}^n V_{y_i} \quad (C \times X)$$

$$\forall x \in V, \quad \forall y \in C, \quad \exists i \quad (y \in W_{y_i})$$

s.t.

$$(x, y) \in V \times W_{y_i} \subset V_{y_i} \times W_{y_i}$$

f.e. $\forall x \in V, \forall y \in C.$

$\forall x \in X, \forall y \in Y,$
 $\varphi(x, y) \in U$
 $\Rightarrow \exists x \in V_1, \exists y \in W_1$
 s.t. $\varphi(V_1 \times W_1) \subset U.$

$$\text{ad}(\varphi)(x)(y) = \varphi(x, y) \in \varphi(V_{y_1} \times W_{y_1}) \subset U$$

つまり, $\text{ad}(\varphi)(V)(C) \subset U$

i.e., $\text{ad}(\varphi) \subset W(C, U)$

□

Cor 3.4.8

F を ファイバー-束 ファイバー-束 において.

$\text{Homeo}(F)$ を $\text{Map}(F, F)$ の 部分空間 として

位相空間 と すれば, その 任意の 座標変換

$$\Phi^{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \text{Homeo}(F)$$

は 連続.

②

$$\text{pr}_2 \circ \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \longrightarrow F$$

が 連続で,

$$\Phi^{\alpha\beta} = \text{ad}(\text{pr}_2 \circ \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})$$

だから, (lem 3.4.7) ② 従う

□

次に、性質 (e).

τ $\text{Homeo}(F)$ がコンパクト 単位相で 位相群 になるか?

つまり、

$$\begin{cases} \mu : \text{Homeo}(F) \times \text{Homeo}(F) \longrightarrow \text{Homeo}(F) \\ \nu : \text{Homeo}(F) \longrightarrow \text{Homeo}(F) \end{cases}$$

$(f, g) \xrightarrow{\quad} g \circ f$
 $f \xrightarrow{\quad} f^{-1}$

は連続か?

この問題を考えよう。

一般には成り立たないので、 F に「少しだけ」条件を加える。

Def 3.4.9

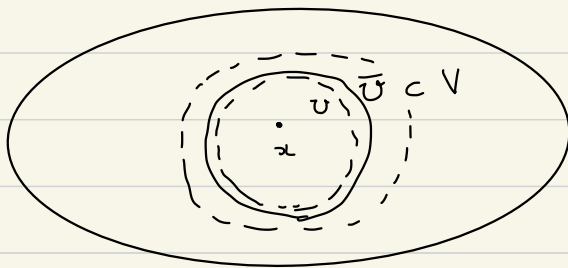
✓ X は Hausdorff を仮定している?? (PDF の最後に補足)

位相空間 X が 局所コンパクト (locally compact)

であるとは、任意の点 $x \in X$ とその周辺部 V に

対し、 x の周辺部 U で 閉包 $\bar{U}$ がコンパクト。

かつ、 $\bar{U} \subset V$ であるもの μ とする。という。



(1 x - 3)

Thm 3.4.10

X, Y, Z : 位相空間

Y : 局所コンパクト Hausdorff と仮定.

このとき.

写像の合成で定義される 写像

$$\mu : \text{Map}(Y, Z) \times \text{Map}(X, Y) \longrightarrow \text{Map}(X, Z)$$

は連続

Cor 3.4.11

X は局所コンパクト Hausdorff かつ

$$\mu : \text{Homeo}(X) \times \text{Homeo}(X) \longrightarrow \text{Homeo}(X)$$

は連続

これを示すために、いくつか準備を行う。

Def 3.4.12

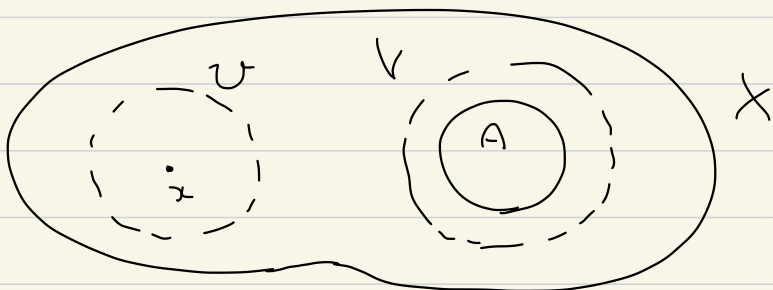
Hausdorff 空間 X について, X が 正則 (regular) であるとは,
任意の $x \in X$ と 閉集合 $A \subset X$ で,

$x \notin A$ であるものに対し,

X の 開集合 U, V で,

$$x \in U, \quad A \subset V, \quad U \cap V = \emptyset$$

であるものが存在することに. いう.



Prop 3.4.13

局所コンパクト Hausdorff 空間 X は正則

① 任意の $x \in X$ と 閉集合 $A \subset X$ で $x \notin A$ となるものを,

$X \setminus A$ は x の 開近傍 なので, x の 開近傍 U で,

$\bar{U}$ がコンパクト, かつ $\bar{U} \subset (X \setminus A)$ となるものが存在する.

X は Hausdorff なので, コンパクト集合 $\bar{U}$ は閉集合.

よって, $X \setminus \bar{U}$ は 開集合で, $A \subset (X \setminus \bar{U})$.

∴ U と $X \setminus \bar{U}$ で, $x \in U, A \subset (X \setminus \bar{U})$,

$U \cap (X \setminus \bar{U}) = \emptyset$ となるものが存在することに正則

[Proof of Thm 3.4.10]

任意の $(f, g) \in \text{Map}(Y, Z) \times \text{Map}(X, Y)$ と.

$\mu(f, g)$ の 開近傍 W に対し, $(\mu(f, g) \in \text{Map}(X, Z))$

(f, g) の 開近傍 W' ぞ.

$$\mu(W') \subset W \quad (\subset \text{Map}(X, Z))$$

となるもの. つまり,

$$(f, g) \in W' \subset \mu^{-1}(W)$$

となるものを 見つければよい.

コンパクト開位相 の定義 から, コンパクト集合 $C \subset X$ と.

開集合 $U \subset Z$ により,

$$W = W(C, U) = \{f: X \rightarrow Z \mid \text{連続}, f(C) \subset U\}$$

と 書ける こと により, すると,

$$\mu(f, g) \in W \Leftrightarrow \mu(f, g) \in W(C, U)$$

$$\Leftrightarrow f \circ g \in W(C, U)$$

$$\Leftrightarrow f(g(C)) \subset U$$

$$\Leftrightarrow g(C) \subset f^{-1}(U)$$

$$\Leftrightarrow \forall y \in g(C), y \notin Y \setminus f^{-1}(U)$$

Y は 局所コンパクト Hausdorff だから. (Prop 3.4.13) より 正則

よて. $y \in g(C) \ (\subset Y)$ に対し, y の 周辺係 V_y と.

(2.6) $Y \setminus f^{-1}(U)$ を含む 開集合 W_y で,

(因) $V_y \cap W_y = \emptyset$

と なるもの ρ^y 存在.

すると, $V_y \subset Y \setminus W_y \subset f^{-1}(U)$

また, Y は 局所コンパクト だから, $\overline{V_y}$ は コンパクト と 有界.
よて なる.

任意の $y \in g(C)$ に対し,

y の 周辺係 V_y で, $\overline{V_y}$ は コンパクト かつ

$$\overline{V_y} \subset f^{-1}(U) \quad (f: Y \rightarrow Z)$$

なるもの ρ^y 存在.

おべての $y \in g(C)$ について 和集合 をとると,

$$g(C) \subset \bigcup_{y \in g(C)} V_y \subset \bigcup_{y \in g(C)} \overline{V_y} \subset f^{-1}(U)$$

とて, C は コンパクト で, g は 連続 だから,

$g(C)$ も コンパクト. よて,

$$\exists y_1, \dots, y_n \in g(C) \quad \text{s.t.} \quad g(C) \subset \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$$

$V = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_{2i}$ とおくと、 V は 開集合で、 $\bar{V}$ はコンパクト.

かつ、 $g(C) \subset V$, $f(\bar{V}) \subset U$. かつ、

$$g \in W(C, V), \quad f \in W(\bar{V}, U).$$

また、

$$\mu(W(\bar{V}, U) \times W(C, V)) \subset W(C, U)$$

だから、

$$W' = W(\bar{V}, U) \times W(C, V)$$

とおくと、

$$\mu(W') \subset W(C, U)$$

つまり W' は、 $(f, g) \in W' \subset \mu^{-1}(W(C, U))$

を満たす (f, g) の 開近傍.

よって、 μ は (f, g) で 連続.

□

次に、

$$\begin{array}{ccc} \nu : \text{Homeo}(X) & \rightarrow & \text{Homeo}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ f & \longmapsto & f^{-1} \end{array}$$

の 連続性を調べる.

Def 3.4.14

位相空間 X, Y に対し.

$$\mathcal{B}^s := \left\{ W(K, U) \mid \begin{array}{l} K \subset X \text{ かつ 閉, } U \subset Y \text{ かつ 開で.} \\ K \text{ or } Y \setminus U \text{ かつ } \text{コンパクト} \end{array} \right\}$$

とおく. $\mathcal{B}^s$ を 開集合の 準基底 とする $\text{Map}(X, Y)$ の

位相 を 対称コンパクト開位相 という

(Symmetrized compact-open topology)

Prop 3.4.16

任意の X に対し. $\text{Homeo}(X)$ に 対称コンパクト開位相 が

入っていること. または. X が コンパクト Hausdorff で

$\text{Homeo}(X)$ に 普通のコンパクト開位相 が 入っていること.

$$\nu : \text{Homeo}(X) \rightarrow \text{Homeo}(X)$$

は 連続.

(後半は 命 3.4.17)

[Proof]

(i) $\text{Homeo}(X)$ に 対称コンパクト 両位相 μ があることを.

$\text{Homeo}(X)$ の 両基 $W(K, U)$ について,

$\nu^{-1}(W(K, U))$ が 両 であることを示せばよい.

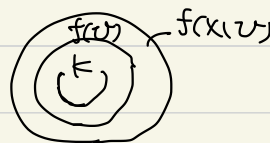
$$f \in \nu^{-1}(W(K, U)) \Leftrightarrow \nu(f) = f^{-1} \in W(K, U)$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(K) \subset U$$

$$\Leftrightarrow K \subset f(U)$$

$$\Leftrightarrow X \setminus K \supset f(X \setminus U)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{f^{-1}(X \setminus K)}_{(K)} \supset \underbrace{X \setminus U}_{\text{コンパクト}}$$



よって, $\nu^{-1}(W(K, U)) = W(X \setminus U, X \setminus K)$

と表せるので, 両集合, 特に ν は 連続.

(ii) X がコンパクト Hausdorff であることを.

(i) と同じく

$$\nu^{-1}(W(K, U)) = W(X \setminus U, X \setminus K)$$

が言える.

ここで、 U : open , X : コンパクト であり、

コンパクト集合の閉集合はコンパクトだから、

$X \setminus U$ はコンパクト .

X : Hausdorff あり、 K はコンパクト あり、

K は 閉集合 . したがって、 $X \setminus K$ は open .

∴ $W(X \setminus U, X \setminus K)$ は $\text{Homeo}(X)$ の 閉集合

□

Cor 3.4.18

上の命題と同じ仮定のもとで、

$$\nu : \text{Homeo}(X) \rightarrow \text{Homeo}(X)$$

は 同相写像 .

Cor 3.4.19

X は 局所コンパクト Hausdorff である。

$\text{Homeo}(X)$ に 対称コンパクト単位相 がある。

X は 局所コンパクト Hausdorff である。

$\text{Homeo}(X)$ に コンパクト単位相 がある。

$\text{Homeo}(X)$ は 位相群 になる。

$$\gamma: \text{Homeo}(X) \rightarrow \text{Homeo}(X)$$

を 与えてもよいことがある。

位相群の定義から 逆元の存在を除いたものは
位相モノイド である。

Def 3.4.21

位相モノイド (topological monoid) とは、

(1) 位相空間 M

(2) 特別な元 $e \in M$

(3) 連続写像 $\mu: M \times M \rightarrow M$

からなり、次の図式を可換にするもの：

$$\begin{array}{ccccc}
 & (m, e) & (e, m) & & \\
 m & & & & m \\
 M & \xrightarrow{I_m \times C_e} & M \times M & \xleftarrow{C_e \times I_m} & M \\
 & \searrow \wr & \downarrow \mu & \swarrow \wr & \\
 & & M & & \\
 & & m & &
 \end{array}$$

$$\mu(m, e) = \mu(e, m) = m$$

$$\begin{array}{ccccc}
 (m_1, m_2, m_3) & M \times M \times M & \xrightarrow{\mu \times I_m} & M \times M & (\mu(m_1, m_2), m_3) \\
 I_m \times \mu \downarrow & & \wr & \downarrow \mu & \\
 (m_1, \mu(m_2, m_3)) & M \times M & \xrightarrow{\mu} & M &
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & \mu(\mu(m_1, m_2), m_3) \\
 &= \mu(m_1, \mu(m_2, m_3)) \\
 & (= m_1 m_2 m_3)
 \end{aligned}$$

以後, $\text{Homeo}(X)$ を考えるときは, ジョイント剛位相
 にお, 位相モノイド とみ替えることがある.

[補足 : 局所コンパクトの定義]

一般の位相空間の本では、局所コンパクトは次のように定義されている: (松坂 p219 424)

Def (局所コンパクト)

位相空間 S の任意の点 x に対して、
コンパクトな近傍 W が少なくとも一つ存在するとき、
 S は 局所コンパクト であるという。

Rem

S 自身 W コンパクト ならば、 S は局所コンパクト。
(コンパクト近傍として S 自身 W とする)

Thm (Munkres: Topology Thm 29.2 424)

X を Hausdorff 空間とする。このとき、

X が局所コンパクト

$\Leftrightarrow$

任意の点 $x \in X$ とその開近傍 U に対し、

x の開近傍 V が閉包 $\overline{V}$ がコンパクトかつ、

$\overline{V} \subset U$ であるもの W がある

← 本の定義

[proof]

[$\Leftarrow$] $\bar{V}$ が x のコンパクト近傍になっているのを OK.

[$\Rightarrow$] X が 局所コンパクト と仮定.

任意の $x \in X$ と x の開近傍 U を考える.

X は 局所コンパクト Hausdorff 空間,

X の 一点コンパクト化 Y が 存在. (松坂 P.219 定理 17.42)

つまり, $\left\{ \begin{array}{l} (i) X \subset Y \\ (ii) Y \setminus X = \{p\} \quad (\text{一点集合}) \\ (iii) Y \text{ は 一点コンパクト Hausdorff 空間.} \end{array} \right.$

とできるような 位相空間 Y が 存在.

$C := Y \setminus U$ とおく.

このとき, C は Y の 閉集合 となる. (Y が 一点コンパクト Hausdorff)

C は Y の 一点コンパクト 部分集合.

よって, (後に述べる補題により) Y の 閉部分集合 V, W で

$$x \in V, \quad C \subset W, \quad V \cap W = \emptyset$$

をあたえることができる.

再び, Y がコンパクトであることから, $\overline{V} \subset Y$ はコンパクト

また, $V \cap W = \emptyset$, $C \subset W$, $C = Y \setminus U$ より

$$V \subset \overline{V} \subset X \setminus W \subset X \setminus C = U$$

(由)

よって $\overline{V} \subset U$ となる

□

Lem

X : Hausdorff 空間 とし.

Y を X のコンパクトな部分集合

$x_0 \in Y$ に含まれない X の点 とする.

このとき, X の 開集合 U, V で,

$$x_0 \in U, \quad Y \subset V, \quad U \cap V = \emptyset$$

をみたすものが存在.

①

X が Hausdorff なので.

各 $y \in Y$ に対し, x_0 の 開近傍 U_y と

y の 開近傍 V_y を, $U_y \cap V_y = \emptyset$ とするものがある.

$\{V_y\}_{y \in Y}$ は Y の 開被覆 であり, Y はコンパクトなため, 有限個の $V_{y_1}, \dots, V_{y_n}$ をとって

$$Y \subset \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$$

とできる.

$$V := V_{\beta_1} \cup \dots \cup V_{\beta_n} \quad \text{とある. } (Y \subset V)$$

$$\text{また, } U := U_{\beta_1} \cap \dots \cap U_{\beta_n} \quad \text{とある.}$$

$$x \in U \text{ で, } U \cap V = \emptyset$$

$$\left(\begin{array}{l} \textcircled{!} \text{ もし } v \in V \text{ ならば, } \exists i \text{ st. } v \in V_{\beta_i} \\ \text{このとき, } v \notin U_{\beta_i} \text{ なので } v \notin U. \end{array} \right)$$

□