

第3章 ファイバー束の基本

3.1 ファイバー束の定義

Def 3.1.1

ファイバー束 (fiber bundle) とは,

3つの位相空間 B, E, F と,

連続写像 $p: E \rightarrow B$ があり,

以下の条件を満たすもの:

任意の $x \in B$ に対し, その近傍 U_x と,

同相写像

$$\varphi_x: p^{-1}(U_x) \xrightarrow{\sim} U_x \times F$$

で, 図式,

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_x) & \xrightarrow{\varphi_x} & U_x \times F \\ p \searrow & \circlearrowleft & \swarrow pr_1 \\ & U_x & \end{array}$$

を可換にするものが存在する.

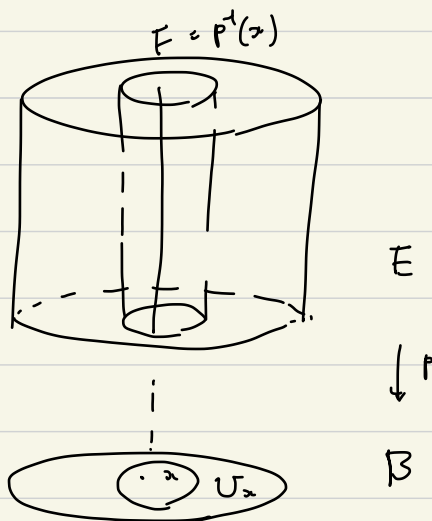
E は 全空間 (total space)

B は 底空間 (base space)

F は ファイバー (fiber)

p は 射影 (projection)

各 U_α は 局所自明化写像 $\times$ 局所自明化 U_α .
(local trivialization)



例 3.1.2

$p: E \rightarrow B$; 被覆空間 に対して. 各 $x \in B$ の近傍 U_x で.

$p^{-1}(U_x) \cong U_x \times p^{-1}(x)$ と 同-視できた. (Prop 2.2.24) より.

B は 弧状連結 なら. 任意のファイバーに 全単射 π がある.

$\therefore p: E \rightarrow B$ は ファイバー-束 になる.

被覆空間のときと同様, 矢程の定義で.

$\alpha' \in U_{\alpha}$ のとき. $U_{\alpha'} = U_{\alpha}$, $\varphi_{\alpha'} = \varphi_{\alpha}$ とおいてよい.

Prop 3.1.3

3つの位相空間 B, E, F に対し.

連続写像

$$p: E \rightarrow B$$

が, F を π_1 -束と見る π_1 -束になっているための
必要十分条件は. 次のもの:

B の開被覆 $B = \bigcup_{\alpha \in A} U_{\alpha}$ と.

各 α に対する同相写像

$$\varphi_{\alpha}: p^{-1}(U_{\alpha}) \xrightarrow{\sim} U_{\alpha} \times F$$

で図式.

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_{\alpha}) & \xrightarrow{\varphi_{\alpha}} & U_{\alpha} \times F \\ p \searrow & & \searrow \pi_1 \\ & & U_{\alpha} \end{array}$$

と可換になるもの φ_{α} 存在する.

例 3.1.8

Möbius の帯 M は, S^1 上の $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ の $\mathbb{R}^1$ -束
 $\mathbb{R}^1$ -束.

②

射影 $p: M \rightarrow S^1$ である.

$$(x, y, z) = \left((2 + t \cdot \cos \frac{\varphi}{2}) \cos \varphi, (2 + t \cdot \cos \frac{\varphi}{2}) \sin \varphi, t \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \right) \\ \in M$$

に對し, $p(x, y, z) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ と定義.

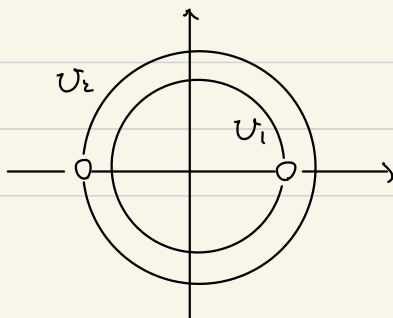
(p は連続)

あとで示す.

S^1 上の次の開集合の和集合で表す:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1 = \{ (\cos \theta, \sin \theta) \mid 0 < \theta < 2\pi \} = S^1 \setminus \{(1, 0)\} \\ U_2 = \{ (\cos \theta, \sin \theta) \mid \theta \neq \pi \} \\ \quad = \{ (\cos \theta, \sin \theta) \mid \pi < \theta < 3\pi \} \\ \quad = S^1 \setminus \{(-1, 0)\}, \end{array} \right.$$

とおく.



U_1, U_2 は S^1 の 1 点の補集合 なので, S^1 の 開集合.

$$S^1 = U_1 \cup U_2.$$

このとき, 定義 による.

$$P^{-1}(U_1) = \left\{ \left((2+t \cos \frac{\varphi}{2}) \cos \varphi, (2+t \cos \frac{\varphi}{2}) \sin \varphi, t \sin \frac{\varphi}{2} \right) \right. \\ \left. \mid -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}, 0 < \varphi < 2\pi \right\}$$

$$P^{-1}(U_2) = \left\{ \left((2+t \cos \frac{\varphi}{2}) \cos \varphi, (2+t \cos \frac{\varphi}{2}) \sin \varphi, t \sin \frac{\varphi}{2} \right) \right. \\ \left. \mid -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}, \pi < \varphi < 3\pi \right\}.$$

$$P^{-1}(U_1) \cong U_1 \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \quad \text{を示すための写像.}$$

$$f_1 : (0, 2\pi) \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \longrightarrow P^{-1}(U_1)$$

$$g_1 : (0, 2\pi) \longrightarrow U_1$$

を次のように定義する:

$$\begin{cases} f_1(\varphi, t) = \left((2+t \cos \frac{\varphi}{2}) \cos \varphi, (2+t \cos \frac{\varphi}{2}) \sin \varphi, t \sin \frac{\varphi}{2} \right) \\ g_1(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi) \end{cases}$$

すると, f_1, g_1 は 同相写像であり.

(あとで示す)

$$\varphi_1 = (g_1 \times \text{id}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}) \circ f_1^{-1}: p^{-1}(U_1) \rightarrow U_1 \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

とおく。 φ_1 は同相写像

同様に、

$$\varphi_2: p^{-1}(U_2) \longrightarrow U_2 \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

も定義できる。

ここで、 $p: M \rightarrow S^1$ は S^1 上 $p^{-1}[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ の
ファイバー束

□

例 3.1.10

(i) p は連続

$$(p: M \rightarrow S^1)$$

(ii) f_1, g_1 は同相写像

($\therefore$)

$$(i) \quad p: (x, y, z) = \left((2 + t \cdot \cos \frac{\varphi}{2}) \cos \varphi, (2 + t \cdot \cos \frac{\varphi}{2}) \cdot \sin \varphi, t \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \right) \\ \longmapsto (\cos \varphi, \sin \varphi)$$

t_0, t_1

$$\begin{cases} x = (2 + t \cdot \cos \frac{\varphi}{2}) \cos \varphi \\ y = (2 + t \cdot \cos \frac{\varphi}{2}) \sin \varphi \end{cases}$$

$$x^2 = \left(2 + t \cdot \cos \frac{\varphi}{2}\right)^2 \cdot \cos^2 \varphi$$

$$y^2 = \left(2 + t \cdot \cos \frac{\varphi}{2}\right)^2 \cdot \sin^2 \varphi$$

$$x^2 + y^2 = \left(2 + t \cdot \cos \frac{\varphi}{2}\right)^2$$

$$\therefore \sqrt{x^2 + y^2} = 2 + t \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \quad (\geq 0)$$

$$\therefore \rho(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \quad (\because \text{連続})$$

(ii)

$$\begin{aligned} \text{次に, } g_1 : (0, 2\pi) &\longrightarrow U_1 = \{(\cos \theta, \sin \theta) \mid 0 < \theta < 2\pi\} \\ &= S^1 \setminus \{(1, 0)\}. \\ \omega & \\ \varphi &\longmapsto (\cos \varphi, \sin \varphi) \end{aligned}$$

が 同相写像 であることを示す.

次の図式を考える:

$$\begin{array}{ccccc} \theta \in (0, 2\pi) & \xrightarrow{g_1} & U_1 & & \\ \downarrow \times \frac{1}{2} & & \uparrow \textcircled{h_1} & & \\ (0, \pi) & \xrightarrow{-\frac{\pi}{2}} & \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) & \xrightarrow{\tan} & \mathbb{R} \\ \omega & & & & \\ \frac{1}{2}\theta & \longmapsto & \frac{1}{2}\theta - \frac{\pi}{2} & \longmapsto & \tan\left(\frac{1}{2}\theta - \frac{\pi}{2}\right) \end{array}$$

上の図式を可換にするような h_1 が存在し、これが「同相写像 h_1 」は、同相写像の合成として g_1 も同相写像 であることを示せる。

$$h_1(t) = \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}, \frac{2t}{t^2+1} \right)$$

とおけば,

$$t = \tan \left(\frac{1}{2}\theta - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{\tan \frac{1}{2}\theta}$$

とて,

$$\frac{t^2-1}{t^2+1} = \cos \theta, \quad \frac{2t}{t^2+1} = \sin \theta$$

とける.

すなわち, $h_1(t)$ の逆写像は $k_1(x, y) = \frac{y}{1-x}$

実際,

$$(h_1 \circ k_1)(x, y) = h_1 \left(\frac{y}{1-x} \right) = (x, y)$$

$$(k_1 \circ h_1)(t) = k_1 \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}, \frac{2t}{t^2+1} \right) = t$$

である.

すなわち f_1 の逆写像

$$l_1 : p^{-1}(U_1) \longrightarrow (0, 2\pi) \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

は,

$$l_1(x, y, z) = \left(\vartheta_1^{-1}(r(x, y, z)), \frac{z}{\sin \frac{\vartheta_1^{-1}(r(x, y, z))}{2}} \right)$$

であるから, f_1, l_1 ともに連続. $\therefore f_1$ は同相写像

例 3.1.11 (Hopf 写像)

3次元球面 S^3 を

ファイバー S^1 , 基底空間 S^2 であるファイバー束の全空間
として表す.

一般には $S^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$

だが、ここでは複素数を用いて次のように表す.

$$\begin{cases} S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}. \\ S^2 = \{(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} \mid x^2 + |z|^2 = 1\} \\ S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} \end{cases}$$

射影

$$\begin{array}{ccc} p: S^3 & \longrightarrow & S^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ (z_1, z_2) & \longmapsto & (2|z_1|^2 - 1, 2z_1\bar{z}_2) \end{array}$$

をよさ. p は well-defined で連続

$$\left(\begin{array}{l} \textcircled{!} \quad (2|z_1|^2 - 1)^2 + |2z_1\bar{z}_2|^2 \\ = 4 \cdot |z_1|^4 - 4|z_1|^2 + 1 + 4 \cdot |z_1|^2 \cdot |\bar{z}_2|^2 \\ = 4 \cdot |z_1|^4 - 4 \cdot |z_1|^2 + 1 + 4 \cdot |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \\ = 1 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\quad}_{1 - |z_1|^2}$

局所自明化写像 について:

まず, 開集合 $U_{\pm}$ を

$$\begin{cases} U_+ = S^2 \setminus \{(1, 0)\} \\ U_- = S^2 \setminus \{(-1, 0)\} \end{cases}$$

で定める.

$U_{\pm}$ は S^2 の 開部分集合で, $S^2 = U_+ \cup U_-$.

つまり, S^2 の どの点も U_+ か U_- を 開近傍 として持つ.

よって, 局所自明化写像 の条件を満たす 同相写像

$$\begin{cases} \varphi_+ : p^{-1}(U_+) \longrightarrow U_+ \times S^1 \\ \varphi_- : p^{-1}(U_-) \longrightarrow U_- \times S^1 \end{cases}$$

を見つけたらよい.

まず, $(z_1, z_2) \in p^{-1}(U_+)$ に対し,

$$\varphi_+(z_1, z_2) = (2|z_1|^2 - 1, 2z_1\bar{z}_2, \frac{z_2}{|z_2|})$$

と置く.

$\cap U_+$

$$p(z_1, z_2) = (2|z_1|^2 - 1, 2z_1\bar{z}_2) \in U_+ \text{ かつ}$$

$$(2|z_1|^2 - 1, 2z_1\bar{z}_2) \neq (1, 0)$$

よって, $z_2 \neq 0$ かつ, $\frac{z_2}{|z_2|} \in S^1$, φ_+ は well-defined で

連続.

作りおき. $p^{-1}(U_+)$ $\longrightarrow$ $U_+ \times S^1$ は可換,

$$\searrow \quad \swarrow$$

U_+

φ_+ は同相写像 であることを示すために,

$$\varphi_+ : U_+ \times S^1 \longrightarrow p^{-1}(U_+)$$

を.

$$\varphi_+(x, z, w) = \left(\frac{zw}{2\sqrt{\frac{1-x}{2}}}, w\sqrt{\frac{1-x}{2}} \right)$$

で定義. (φ_+ は連続)

$$(\varphi_+ \circ \varphi_+)(z_1, z_2) = \varphi_+(2|z_1|^2 - 1, 2z_1\bar{z}_2, \frac{z_2}{|z_1|})$$

$$= \left(\frac{2z_1\bar{z}_2 \cdot \frac{z_2}{|z_1|}}{2\sqrt{\frac{1-(2|z_1|^2-1)}{2}}}, \frac{z_2}{|z_1|} \cdot \sqrt{\frac{1-(2|z_1|^2-1)}{2}} \right)$$

$$\sqrt{1-|z_1|^2} = |z_2|, \quad |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$$

$$= (z_1, z_2)$$

$$(\varphi_+ \circ \varphi_+)(x, z, w) = \varphi_+ \left(\frac{zw}{2\sqrt{\frac{1-x}{2}}}, w\sqrt{\frac{1-x}{2}} \right)$$

$$= \left(2 \cdot \left(\frac{|zw|}{2\sqrt{\frac{1-x}{2}}} \right)^2 - 1, 2 \frac{zw}{2\sqrt{\frac{1-x}{2}}} \cdot \bar{w} \cdot \sqrt{\frac{1-x}{2}}, \frac{w \cdot \sqrt{\frac{1-x}{2}}}{|w|\sqrt{\frac{1-x}{2}}} \right)$$

$$= (x, z, w).$$

よって, φ_+ , φ_+ は互いに逆写像 かつ 同相写像.
 同様に.

$$\begin{aligned} \varphi_- : p^{-1}(U_-) &\longrightarrow U_- \times S^1 \\ \downarrow &\quad \downarrow \\ (z_1, z_2) &\longmapsto (2|z_1|^2 - 1, 2z_1 \bar{z}_2, \frac{z_1}{|z_1|}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_- : U_- \times S^1 &\longrightarrow p^{-1}(U_-) \\ \downarrow &\quad \downarrow \\ (x, z, w) &\longmapsto \left(w \sqrt{\frac{1+x}{2}}, \frac{\bar{z} w}{2 \sqrt{\frac{1+x}{2}}} \right) \end{aligned}$$

よって, φ_- も 同相写像 だと分かる.

以上により, $\gamma : S^3 \rightarrow S^2$ は, ファイバーが S^1 かつ
 ファイバー束 $\square$ (これは Hopf 束 である).