§2.4 基本群の作用と普遍被覆

§2.3 の作用を左作用に書きかえる.

Lem 2.4.1

群 G の集合 S への右作用 μ が与えられたとき.
$g \in G$ と $x \in S$ に対し.

$$\mu^{op}(g, x) := \mu(x, g^{-1})$$

と定めると. μ^{op} は G の S への左作用になる.

Def 2.3.22 (左作用)

$\mu^{op} : G \times S \longrightarrow S$

(1) $\forall x \in S, \ \mu^{op}(e, x) = x$.

(2) $\forall x \in S, \ \forall g, h \in G,$

$$\mu^{op}(gh, x) = \mu^{op}(g, \mu^{op}(h, x))$$

$(gh).x = g.(h.x)$

(Proof of Lem 2.4.1)

(1) $\forall x \in S,$

$$\begin{aligned} \mu^{op}(e, x) &= \mu(x, e^{-1}) \\ &= \mu(x, e) \\ &= x. \end{aligned}$$

(2) $\mu^{op}(gh, x) = \mu(x, (gh)^{-1})$
$$= \mu(x, h^{-1}g^{-1})$$
$$= \mu(\mu(x, h^{-1}), g^{-1})$$
$$= \mu(\mu^{op}(h, x), g^{-1})$$
$$= \mu^{op}(g, \mu^{op}(h, x))$$
□

Prop 2.4.4

集合 S から自分自身への全単射全体 が
写像の合成を演算としてなす群を $\mathrm{Aut}(S)$ と表す

群 G の S への左からの作用 と,
群準同型 $G \to \mathrm{Aut}(S)$ は,
一対一に対応する.

∵

$\mu : G \times S \longrightarrow S$ を左作用とする.
$g \in G$ に対し, $\mathrm{ad}(\mu)(g) \in \mathrm{Aut}(S)$ を,
$$\mathrm{ad}(\mu)(g)(x) = \mu(g, x)$$
で定める.
以下,
$$g.x := \mu(g, x) \qquad (g \in G, x \in X)$$
とかく.

まず，$\forall g \in G$,　$\mathrm{ad}(\mu)(g) : S \longrightarrow S$

が $\mathrm{Aut}(S)$ の元，

つまり，全単射 であることを示す．

そのために，$\mathrm{ad}(\mu)(g^{-1})$ が その逆写像 であることを示す．

任意の $x \in S$ に対し，

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{ad}(\mu)(g^{-1}) \circ \mathrm{ad}(\mu)(g))(x) \\
&= \mathrm{ad}(\mu)(g^{-1})(\mathrm{ad}(\mu)(g)(x)) \\
&= \mathrm{ad}(\mu)(g^{-1})(\mu(g, x)) \\
&= \mathrm{ad}(\mu)(g^{-1})(g.x) \\
&= \mu(g^{-1}, g.x) \\
&= g^{-1}.(g.x) \\
&= (g^{-1}g).x \\
&= e.x \\
&= x
\end{aligned}
$$

$\therefore\ \mathrm{ad}(\mu)(g^{-1}) \circ \mathrm{ad}(\mu)(g) = 1_S$.

同様に、

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathrm{ad}(\mu)(g) \circ \mathrm{ad}(\mu)(g^{-1})\right)(x) \\
&= \mathrm{ad}(\mu)(g)\left(\mathrm{ad}(\mu)(g^{-1})(x)\right) \\
&= \mathrm{ad}(\mu)(g)\left(\mu(g^{-1}, x)\right) \\
&= \mathrm{ad}(\mu)(g)(g^{-1}.x) \\
&= \mu(g, g^{-1}.x) \\
&= g.(g^{-1}.x) \\
&= (g \cdot g^{-1}).x \\
&= e.x \\
&= x.
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad \mathrm{ad}(\mu)(g) \circ \mathrm{ad}(\mu)(g^{-1}) = 1_S.$$

ゆえに、 $\mathrm{ad}(\mu)(g)$ は 全単射.

次に、 $\mathrm{ad}(\mu)$ が 群の準同型であることを示す

つまり、

$$\forall g, h \in G, \quad \mathrm{ad}(\mu)(gh) = \mathrm{ad}(\mu)(g) \circ \mathrm{ad}(\mu)(h).$$

を示す.

ここで，$x \in S$ に対して，

$$\mathrm{ad}(\mu)(gh)(x) = \mu(gh, x) = (gh).x$$

であり，

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}(\mu)(g) \circ \mathrm{ad}(\mu)(h)(x) &= \mathrm{ad}(\mu)(g)\,(\mu(h,x)) \\ &= \mathrm{ad}(\mu)(g)\,(h.x) \\ &= \mu(g, h.x) \\ &= g.(h.x) \\ &= (gh).x\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \mathrm{ad}(\mu)(gh) = \mathrm{ad}(\mu)(g) \circ \mathrm{ad}(\mu)(h) \qquad (\therefore \text{準同型})$$

$$\therefore \quad \mathrm{ad}(\mu)(g) \in \mathrm{Aut}(S).$$

逆に，準同型

$$f : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(S)$$

が与えられたとき，

G の S への作用

$$\mu_f : G \times S \longrightarrow S$$

は

$$\mu_f(g, x) := f(g)(x)$$

で定義される．

∵ 示すこと : μ_f が左作用であること.

(1) f が準同型で, $\ker(f) = \{e\}$ だから

$$\forall x \in S, \quad \mu_f(e, x) = f(e)(x) = x.$$

$$(f(e) = 1_S)$$

(2) $\forall g, h \in G$,

$$\begin{aligned}
\mu_f(gh, x) &= f(gh)(x) \\
&= (f(g) \circ f(h))(x) \\
&= f(g)(f(h)(x)) \\
&= f(g)(\mu_f(h, x)) \\
&= \mu_f(g, \mu_f(h, x))
\end{aligned}$$

□

Claim

$$\{f : G \to \mathrm{Aut}(S)\} \xrightarrow{\psi} \{\mu_f : G \times S \to S\}$$

は

$$\{\mu : G \times S \to S\} \xrightarrow{\varphi} \{\mathrm{ad}(\mu) : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(S)\}$$

の逆対応.

∵

$\psi(f) = \mu_f$, $\varphi(\mu) = \mathrm{ad}(\mu)$ とおく.

$(\varphi \circ \psi)(f) = f, \quad (\psi \circ \varphi)(\mu) = \mu$ を示す.

(i) $(\varphi \circ \psi)(f) = f$

$$\psi(f) = \mu_f.$$

$$\varphi(\psi(f)) = \varphi(\mu_f) = \mathrm{ad}(\mu_f)$$

ここで.

$\forall g \in G, \forall x \in S,$

$$\mathrm{ad}(\mu_f)(g)(x) = \mu_f(g, x)$$

$$= f(g)(x).$$

$$\therefore \varphi(\psi(f)) = \mathrm{ad}(\mu_f) = f.$$

(ii) $(\psi \circ \varphi)(\mu) = \mu$

$$\varphi(\mu) = \mathrm{ad}(\mu)$$

$$\psi(\varphi(\mu)) = \psi(\mathrm{ad}(\mu)) = \mu_{\mathrm{ad}(\mu)}$$

$\forall g \in G, \forall x \in S.$

$$\mu_{\mathrm{ad}(\mu)}(g, x) = \mathrm{ad}(\mu)(g, x)$$

$$= \mu(g, x)$$

$$\therefore (\psi \circ \varphi)(\mu) = \mu_{\mathrm{ad}(\mu)} = \mu$$

□

$p : E \to B$ を被覆空間とする.

$\pi_1(B, x_0)$ の x_0 上のファイバー $F_{x_0} = p^{-1}(x_0)$ への右作用 φ を、左作用 φ^{op} に変えたものから準同型

$$\mathrm{ad}(\varphi^{op}) : \pi_1(B, x_0) \longrightarrow \mathrm{Aut}(F_{x_0})$$

を得る.

一方、被覆空間の同型写像

$$f : E \longrightarrow E'$$

があると、全単射

$$f|_{F_{x_0}} : F_{x_0} \longrightarrow F'_{x_0}$$

を得る.

これを用いて、群の同型写像

$$f_* : \mathrm{Aut}(F_{x_0}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(F'_{x_0})$$

が、$f_*(\sigma) = (f|_{F_{x_0}}) \circ \sigma \circ (f|_{F_{x_0}})^{-1}$ で定まる.

$$\begin{tikzcd}
F_{x_0} \arrow[r, "f|_{F_{x_0}}"] \arrow[d, "\sigma"'] & F'_{x_0} \arrow[d, "f_*(\sigma)"] \\
F_{x_0} \arrow[r, "f|_{F_{x_0}}"'] & F'_{x_0}
\end{tikzcd}$$

Prop 2.4.5

次の図式は可換：

$$\begin{tikzcd} & & \mathrm{Aut}(F_{x_0}) \ni \varphi_l^{op} \arrow[d, "f_*"] \\ [l] \in & \pi_1(B, x_0) \arrow[ur, "\mathrm{ad}(\varphi^{op})"] \arrow[r, "\mathrm{ad}(\varphi'^{op})"'] & \mathrm{Aut}(F'_{x_0}) \ni \varphi_l'^{op} \end{tikzcd}$$

(:)

$\forall x \in F'_{x_0}$, $\forall [l] \in \pi_1(B, x_0)$,

① $\mathrm{ad}(\varphi'^{op})([l])(x) = \varphi'^{op}([l], x)$

$= \varphi'(x, [l]^{-1})$

$= \varphi'_{l^{-1}}(x)$.

② $(f_* \circ \mathrm{ad}(\varphi^{op})([l]))(x)$

$= f_*(\mathrm{ad}(\varphi^{op})([l]))(x)$

$= ((f|_{F_{x_0}}) \circ (\mathrm{ad}(\varphi^{op})([l])) \circ (f|_{F_{x_0}})^{-1})(x)$

$= (f|_{F_{x_0}})(\mathrm{ad}(\varphi^{op})([l])((f|_{F_{x_0}})^{-1}(x)))$

$= (f|_{F_{x_0}})(\varphi^{op}([l], (f|_{F_{x_0}})^{-1}(x)))$

$= (f|_{F_{x_0}})(\varphi_{l^{-1}}((f|_{F_{x_0}})^{-1}(x)))$

$= ((f|_{F_{x_0}}) \circ \varphi_{l^{-1}} \circ (f|_{F_{x_0}})^{-1})(x)$

$= \varphi'_{l^{-1}}(x)$ $\quad \therefore (f_* \circ \mathrm{ad}(\varphi^{op})([l]))(x) = \mathrm{ad}(\varphi'^{op})([l])(x)$

$\dot{□}$

Def 2.4.6

群 G の集合 S と S' への作用 μ, μ' が与えられているとする。
この2つの作用は、全単射 $f: S \to S'$ であって、
図式、

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Aut}(S) \arrow[d, "f_*"] \\ G \arrow[ru] \arrow[r] & \mathrm{Aut}(S') \end{tikzcd}$$

を可換にするものが存在するとき、**同値 (equivalent)** であるという。
ただし、$f_*(\sigma) = f \circ \sigma \circ f^{-1}$ で定義する。

(Prop 2.4.5) は、同値な (同型な) 被覆空間からできる基本群のファイバーへの作用は同値になる、ということ。

Q. 2.4.7

群準同型 $f: \pi_1(B, x_0) \longrightarrow \mathrm{Aut}(F)$
が与えられたとき、
これからB上のFをファイバーとする被覆空間が得られるか?
そして、同値な作用からは同値な被覆空間が
得られるか?

⇝ Yesなら、被覆空間は基本群のファイバーへの作用で分類できる。

Def 2.4.8

被覆空間 $p : E \to B$ は、
E が単連結のとき、普遍被覆 (universal covering)
とよばれる。
また、このとき、E を B の普遍被覆ともよぶ。

Def 2.4.10

位相空間 X は、各点 $x \in X$ の近傍 U で
以下の条件をみたすものが存在するとき、
半局所単連結 (semi locally simply connected) とよばれる。

任意の $l \in \Omega(U, x)$ は、$\Omega(X, x)$ の元として
x での定値ループ c_x とホモトピック

Thm 2.4.12

B が局所弧状連結、半局所単連結、弧状連結なら
B 上の普遍被覆が存在する。

(4.11 節で…)