

§ 2.3 基本群 と そのファイバーへの作用

Def (ループ空間)

X の点 x_0 を指定したとき.

$$\Omega(X, x_0) = \{ \ell : [0, 1] \rightarrow X \mid \ell \text{ は連続, } \ell(0) = \ell(1) = x_0 \}$$

を表し. これは X の x_0 を基点とすると

ループ空間 (loop space) とよむ.

ΩX と書く.

Def 2.3.3

位相空間 X に点 x_0 が指定されているとき.

組 (X, x_0) を 基点付き空間 (base space) とよむ.

x_0 を X の 基点 (base point) とよむ.

被覆空間

$$p: E \rightarrow B$$

n 次元空間 B の点 $x_0 \in B$ に対し.

これを基点とすループ ℓ は. 写像

$$\ell: p^{-1}(x_0) \rightarrow p^{-1}(x_0)$$

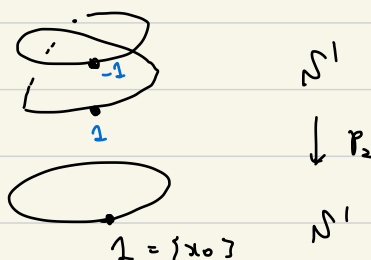
を誘導する. (Prop 2.2.24) より. これは全単射.

このような写像が??

例 2.3.4

$$p_2 : S^1 \longrightarrow S^1$$

を考慮.



$x_0 = 1$ を基点 とする 1-70 をとる.

$$\gamma(t) = e^{2\pi i t} \quad (t \in [0, 1])$$

を考慮.

$$p_2^{-1}(x_0) = \{1, -1\}$$

をみる.

$$\left(\begin{array}{l} 1 = e^{2\pi i t} \quad (t \in [0, 1]) \\ \text{の解は } t = \pm 1 \end{array} \right)$$

$$\varphi_2 : p_2^{-1}(x_0) \longrightarrow p_2^{-1}(x_0)$$

を求めたため γ のリフトを考慮.

1 の始点 433 177 は. $\tilde{\ell}_1(t) = e^{\pi t i}$ z^4 と一致する.

$$\left(\begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \tilde{\ell}_1(0) = e^0 = 1, \quad \tilde{\ell}_1(1) = e^{\pi i} = -1 \\ (p_2 \circ \tilde{\ell}_1)(t) = p_2(\tilde{\ell}_1(t)) \\ \quad = p_2(e^{\pi t i}) \\ \quad = e^{2\pi t i} \end{array} \right)$$

-1 の始点 433 177 は $\tilde{\ell}_2(t) = e^{\pi(t+1)i}$ z^4 と一致する.

$$\left(\begin{array}{l} \textcircled{2} \\ (p_2 \circ \tilde{\ell}_2)(t) = p_2(e^{\pi(t+1)i}) \\ \quad = e^{2\pi(t+1)i} \\ \quad = e^{2\pi t i} \end{array} \right)$$

よ.2. $\varphi_2(x) = \begin{cases} e^{\pi i} = -1 & (x=1) \\ e^{2\pi i} = 1 & (x=-1) \end{cases}$

781. φ_2 は 1 と -1 の 2 点替え写像.

より一般に,

$$p_n: S' \longrightarrow S'$$

について,

$$\alpha_0 = 1 \text{ 上の } \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \text{ 上は. } \zeta_n = e^{\frac{2\pi}{n}i} \text{ として,}$$

$$p_n^{-1}(1) = \{1, \zeta_n, \zeta_n^2, \dots, \zeta_n^{n-1}\}$$

を定める,

p_n のときと $\mathbb{C}$ の n -等分点 1 の n 個を考慮する.

ζ_n^k を始点とする n 等分点 $\tilde{\zeta}_k$ は,

$$\tilde{\zeta}_k(t) = \exp\left(\frac{2\pi i(t+k)}{n}\right)$$

で与えられる.

$$\left(\begin{array}{l} (p_n \circ \tilde{\zeta}_k)(t) = \exp(2\pi i(t+k)) = \exp(2\pi i t) \\ \tilde{\zeta}_k(0) = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}k\right) = \zeta_n^k \\ \tilde{\zeta}_k(1) = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}(k+1)\right) = \zeta_n^{k+1} \end{array} \right)$$

より,

$$\varphi_n(\zeta_n^k) = \zeta_n^{k+1}$$

より,

φ_n は, $1, \zeta_n, \zeta_n^2, \dots, \zeta_n^{n-1}$ を n 個の n 等分点 ζ_n^k の n 等分点 ζ_n^{k+1} への写像.

Def 2.3.5

被覆空間 $\left\{ \begin{array}{l} p: E \rightarrow B \\ p': E' \rightarrow B \end{array} \right.$ に対し、

p から p' への 被覆空間の写像 (map of covering spaces)
とは、連続写像

$$f: E \rightarrow E'$$

で、図式

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ p \searrow & & \swarrow p' \\ & B & \end{array}$$

が可換に成るものとして定義する。

さらに、各 $x \in B$ に対し、 f の制限

$$f|_{p^{-1}(x)} : p^{-1}(x) \rightarrow (p')^{-1}(x)$$

が全単射に成るとき、 f は被覆空間の同型写像
であるという (isomorphism)

そのほか f が存在するとき、この2つの被覆空間は
同型 (isomorphism) であるという。

Thm 2.3.7

B 上の任意の被覆空間は、
自明な被覆空間 と同型.

Ref 2.3.8

位相空間 X の開集合の基底 として、
次の種類のものを $\mathcal{B}$ とおくとする。

- (1) 連結 (2) 弧狀連結
(3) 單連結 (4) 可縮

このとき、 X は、

- (1) 局所連結 (locally connected)
- (2) 局所弧状連結 (locally path connected)
- (3) 局所単連結 (locally simply connected)
- (4) 局所可縮 (locally contractible)

とよはし"朱子

[proof of Thm 2.3.7]

B : 単連結 2° .

$p : E \rightarrow B$ を被覆空間 とす.

$x_0 \in B$ を えて x_0 で 固定し.

$$F := p^{-1}(x_0)$$

とす.

被覆空間の写像

$$f : E \rightarrow B \times F$$

を定義す.

B は 単連結 なので, 定義から 局所連結.

よて, $e \in E$ に 対し, $p(e)$ から x_0 の 道

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow B$$

が存在.

(Def 2.2.20) の 対応 に 対し, 写像

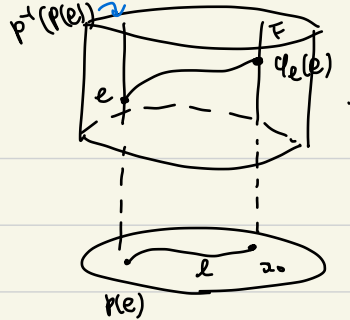
$$\varphi_e : p^{-1}(p(e)) \rightarrow p^{-1}(x_0) = F$$

を得る.

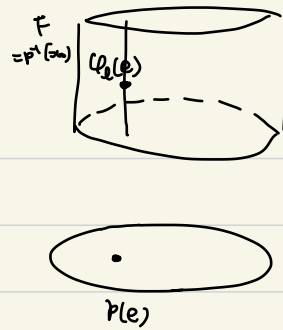
これを 用いて, $f(e) = (p(e), \varphi_e(e))$ を 定義.

B が 単連結 なので, この 値 は γ の 選び によらない.

f が 連続 であることを 示す.



$$\begin{array}{ccc} E & \rightarrow & B \times F \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & = & B \end{array}$$



F は E の部分空間 として 離散位相 を持つから
 B の 開集合 U として F の点 e に対して
 $f^{-1}(U \times \{e\})$ が 開集合 であることを示せばよい。
 $\uparrow$ 用結果

$e \in f^{-1}(U \times \{e\})$ に対して $p(e) \in U$ である。
 U が 開集合 なので $p(e)$ の 開近傍 $V \subset U$ である。
 ところで p が 局所自明化 されているものがあるから。

i.e.,

$$p^{-1}(V) = \coprod_{z \in p^{-1}(p(e))} \tilde{V}_z$$

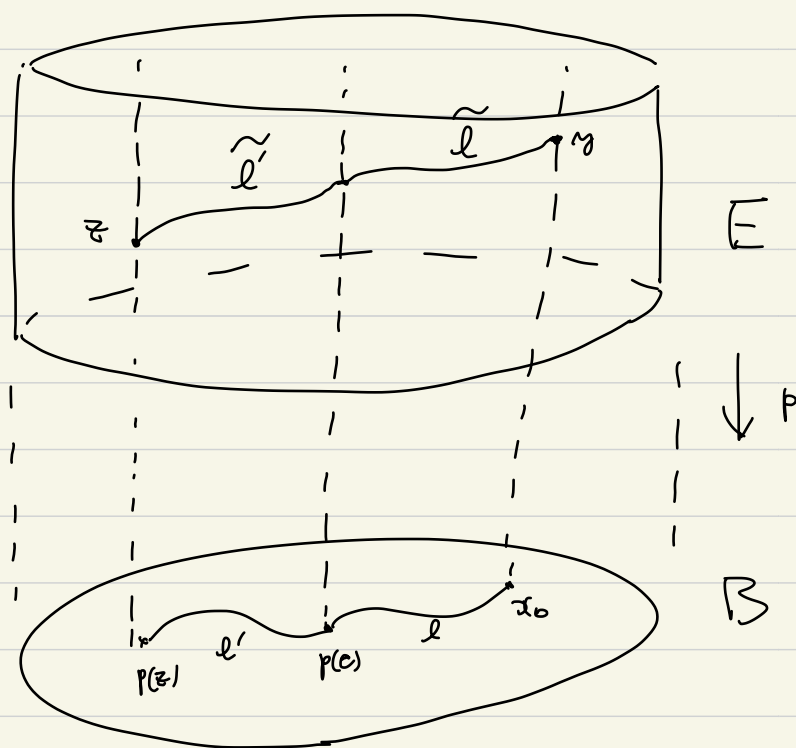
ここで B が 局所 弧状連結 かつ
 V は 弧状連結 に なる。

このとき $f(\tilde{V}_e) \subset V \times \{e\}$ を示す。

$(f(\tilde{V}_e) \subset V \times \{e\} \subset U \times \{e\} \neq \tilde{V}_e \subset f^{-1}(U \times \{e\}))$
 $\uparrow$ e は $f^{-1}(U \times \{e\})$ の 任意の点

$\varepsilon \in \tilde{V}_e$ に対し, V 内の道 l'
 s.t. $l'(0) = p(\varepsilon), l'(1) = p(e)$

4. ε を l とつなげた道 $l' * l$ を考える.



$l' * l$ は $p(\varepsilon)$ と x_0 をつなぐ道であり,
 $l' * l$ の ε を始点とするリフト $\tilde{l' * l}$ は,
 l' の ε を始点とするリフト $\tilde{l'}$ と $\tilde{l}$ と $\tilde{l' * l}$ である。
 よって, その終点は y

$\therefore f(\varepsilon) \in V \times \{y\},$

$$f(z) = (p(z), \varphi_{\tilde{e} \# \tilde{e}}(z)) = (p(z), \gamma) \quad (p(z) \in V)$$

$$\therefore f(\tilde{V}_e) \subset V \times \{\gamma\} \subset U \times \{\gamma\}$$

$$\therefore f^{-1}(f(\tilde{V}_e)) \subset f^{-1}(V \times \{\gamma\}) \subset f^{-1}(U \times \{\gamma\}).$$

よて, $f^{-1}(U \times \{\gamma\})$ は 開集合.

$\therefore f$ は 連続.

図式.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & B \times F \\ & \searrow p & \swarrow pr_1 \\ & B & \end{array}$$

可換に於ては, f の つぎが 合はる.

(Prop 2.2.24) より, f は 各ファイバー 上で 全射

($\because B$ は 弧状連結)

よて, f は 被覆空間の 同型写像.

□

Def 2.3.9

2つのループ $l_1, l_2 \in \Omega(X, x_0)$ を結合した道 $l_1 * l_2$ は、 $\Omega(X, x_0)$ の元。

よって、写像

$$\begin{aligned} \mu: \Omega(X, x_0) \times \Omega(X, x_0) &\longrightarrow \Omega(X, x_0) \\ (l_1, l_2) &\longmapsto l_1 * l_2 \end{aligned}$$

を得る。

この写像を ループ積 (loop product) とする。

Def 2.3.10

群とは. 集合 G , 特別な元 $e \in G$, 写像

$$\mu: G \times G \longrightarrow G$$

$$\nu: G \longrightarrow G$$

からなり, 次の条件をみたすものである:

$$(1) \quad \forall g \in G, \quad \mu(e, g) = \mu(g, e) = g.$$

i.e.,

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{1_G \times c_e} & G \times G & \xleftarrow{c_e \times 1_G} & G \\ \swarrow & & \downarrow \mu & & \searrow \\ & & G & & \end{array}$$

$\mu(g, e) = \mu(e, g) = g$

可換.

$$(2) \quad \forall g, h, k \in G, \quad \mu(\mu(g, h), k) = \mu(g, \mu(h, k))$$

i.e.,

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times G & \xrightarrow{\mu \times 1_G} & G \times G \\ \downarrow 1_G \times \mu & & \downarrow \mu \\ G \times G & \xrightarrow{\mu} & G \end{array}$$

可換.

$$(3) \quad \forall g \in G, \quad \mu(\nu(g), g) = \mu(g, \nu(g)) = e.$$

i.e.,

$$\begin{array}{ccccc}
 (g, g^{-1}) \in G \times G & \xleftarrow{1_G \times \nu} & G \times G & \xrightarrow{\nu \times 1_G} & G \times G \ni (g^{-1}, g) \\
 \downarrow \mu & & \uparrow \Delta & & \downarrow \mu \\
 e \in G & \xleftarrow{c_e} & G & \xrightarrow{c_e} & G \ni e
 \end{array}$$

Δ is labeled with (g, g) above it, and c_e is labeled with e, g below it.

が可換.

$$\left\{ \begin{array}{ll} e & e \text{ 単位元.} \\ \mu(g, h) = g \cdot h & e \quad g \in h \text{ の積} \\ \nu(g) = g^{-1} & e \quad g \text{ の逆元} \end{array} \right. \quad \text{e.u.}$$

また, $\mu, \nu \in G$ の 構造写像 (structure map) e.u.

Rem

ΩX は μ で $\mathbb{R}$ は群をなさない.

[結合律が成り立たないこと]

$l_1, l_2, l_3 \in \Omega X$ に対し.

$$((l_1 * l_2) * l_3)(t) = \begin{cases} (l_1 * l_2)(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ l_3(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} l_1(4t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ l_2(4t-1) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ l_3(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$$(l_1 * (l_2 * l_3))(t) = \begin{cases} l_1(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (l_2 * l_3)(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} l_1(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ l_2(4t-2) & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ l_3(4t-3) & \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

したがって, $((l_1 * l_2) * l_3) \neq (l_1 * (l_2 * l_3))$

Prop 2.3.11

基点付き空間 (X, α_0) の 1 -7° l_1, l_2, l_3 に対し.

$$((l_1 * l_2) * l_3) \stackrel{\text{h.p.}}{\simeq} (l_1 * (l_2 * l_3))$$

(1)

$((l_1 * l_2) * l_3)$ と $(l_1 * (l_2 * l_3))$ の間のホモトピー -

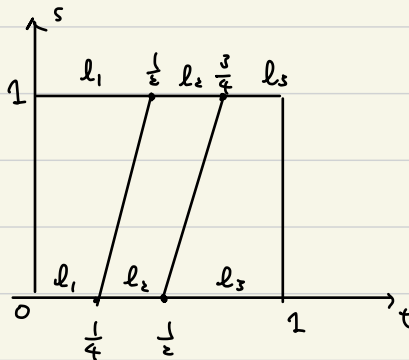
$$H : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X$$

を構成.

$((l_1 * l_2) * l_3)$ に対応する $[0, 1]$ の分割 τ .

$(l_1 * (l_2 * l_3))$ に対応する $[0, 1]$ の分割 σ に

連続的に変形できればよい.



この図で, σ は "ホモトピー" のパラメータ, t は 1 -7° のパラメータ.

左側の直線の方程式は

$$s = 4t - 1.$$

右側の直線の方程式は

$$s = 4t - 2, \quad \left(s = 4\left(t - \frac{1}{4}\right) - 1 \right).$$

$$\therefore H(t, s) = \begin{cases} l_1\left(\frac{4}{s+1}t\right), & 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4} \\ l_2(4t-s-1), & \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4} \\ l_3\left(\frac{4}{2-s}\left(t - \frac{s+2}{4}\right)\right), & \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} H(0, s) = l_1(0) = x_0 \\ H(1, s) = l_3(1) = x_0. \end{cases}$$

$$\text{より, } H(\partial[0, 1], s) = x_0$$

□

[単位元について]

x_0 に留まっている道 C_{x_0} を考える.

$$(l * C_{x_0})(t) = \begin{cases} l(2t) & , 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ x_0 & , \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$$(C_{x_0} * l)(t) = \begin{cases} x_0 & , 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ l(2t-1) & , \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Prop 2.3.12.

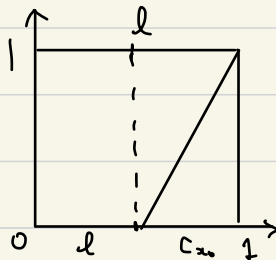
(X, x_0) : 基点付空間

(X, x_0) の l - γ^0 l に x_0 対し.

$$l * C_{x_0} \simeq l \simeq C_{x_0} * l.$$

($\therefore$)

$l * C_{x_0} \simeq l$ を考える.



$$H(t, s) = \begin{cases} l\left(\frac{2t}{s+1}\right) & , 0 \leq t \leq \frac{s+1}{2} \\ x_0 & , \frac{s+1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

path $l * C_{x_0}$ to l

[逆元について]

Def 2.3.14 (逆元)

$$l \in \Omega(X, x_0) \quad \text{に 対し.}$$

$$\nu(l) \in \Omega(X, x_0) \quad \text{を}$$

$$\nu(l)(t) = l(1-t)$$

で定義する.

Prop 2.3.15

$$l \in \Omega(X, x_0) \quad \text{に 対し.}$$

$$l * \nu(l) \simeq c_{x_0} \simeq \nu(l) * l$$

(i)

$$l * \nu(l) \simeq c_{x_0} \quad \text{を 示す.}$$

$$(l * \nu(l))(t) = \begin{cases} l(2t) & , \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}. \\ l(2-2t) & , \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X \quad \text{を}$$

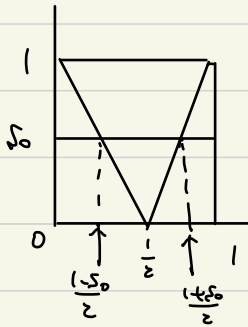
$$H(t, s) = \begin{cases} l(2ts) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}. \\ l((2-2t)s) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

で定義する. これは, $l * \nu(l) \simeq c_{x_0}$ の同筋の証明である.

81)

$$H(t, s) = \begin{cases} l(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2} \\ l(1-s) & \frac{1-s}{2} \leq t \leq \frac{1+s}{2} \\ l(2-2t) & \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$2^u \in l * \nu(l) \in C_{x_0}$ かつ C^u が $\tau(t^0)$ - に好子.



Def 2.3.16

集合 S 上に同値関係 $\sim$ が与えられているとき.

その同値類の集合を $S/\sim$ と表す.

これを S の $\sim$ による 商集合 (quotient set) と言う.

Prop 2.3.17

関係 $\simeq$ は $\Omega(X, x_0)$ 上の同値関係.

①

(1) 反射律

$l \in \Omega(X, x_0)$ に對し. $H(t, s) = l(t)$ とおけば
 $l \simeq l$.

(2) 対称律

$l, l' \in \Omega(X, x_0)$ かつ $l \simeq l'$ を満たすとき.

そのホモトピー - $H(t, s)$ とする.

$$G(t, s) := H(t, 1-s)$$

は l' かつ l のホモトピー -

(3) 推移律

$l \simeq l', l' \simeq l''$ ならば.

それらのホモトピー - H, H' をかければ.

$$G(t, s) = \begin{cases} H(t, 2s) & , 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ H'(t, 2s-1) & , \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

かつ l かつ l'' のホモトピー - になる.

□

Def 2.3.18

集合 $\Omega(X, x_0)$ の $\simeq$ による商集合を $\pi_1(X, x_0)$ と書き、 X の x_0 を基点とする 基本群 (fundamental group) とよぶ。

$l \in \Omega(X, x_0)$ の同値類を $[l]$ で表し、
 l の ホモトピー-類 (homotopy class) といい。

Cor 2.3.19

基点付き空間 (X, x_0) に対し、

$\pi_1(X, x_0)$ は ループ積を演算 として群になる。

Lem 2.3.21

弧状連結な位相空間 X に対し、単連結である
必要十分条件は、 $\pi_1(X, x_0) = \{C_{x_0}\}$ となること。

(証明は 4.6 節)

(Lem 2.2.21) より, φ_l は l のホモトピー-同値類の
 通りに依る.

よって, $[l] \in \pi_1(X, x_0)$, $\gamma \in p^{-1}(x_0)$ に対し,
 $\varphi_l(\gamma)$ を対応させることにする. 写像

$$\begin{array}{ccc} \varphi: p^{-1}(x_0) \times \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & p^{-1}(x_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\gamma, [l]) & \longmapsto & \varphi_l(\gamma) \end{array}$$

を得る. この対応を 群作用 といふ.

Def 2.3.22

G : 群.

S : 集合

とする.

G の S への (右) 作用 (action) といふ.

写像 $\mu: S \times G \longrightarrow S$ であって, 次の条件を満たすもの.

(1) $\forall x \in S, \mu(x, e) = x$

i.e., $x \in S \xrightarrow{1_S \times C_e} S \times G \ni (x, e)$

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow \mu & \downarrow \\ & S & \ni x \end{array}$$

=

が可換.

$$(2) \quad \forall g, h \in G, \quad \forall x \in G,$$

$$\mu(\mu(x, g), h) = \mu(x, gh)$$

i.e.,

$$(x, g, h) \in N \times G \times G \xrightarrow{\mu \times \text{id}} N \times G \ni (x \cdot g, h)$$

$$\downarrow \text{id} \times \mu \quad \downarrow \mu$$

$$(x, gh) \in N \times G \longrightarrow N \ni \begin{matrix} x \cdot (gh) \\ \downarrow \\ (x \cdot g) \cdot h \end{matrix}$$

が可換.

簡単のため. $\mu(x, g) = x \cdot g$ とおく.

同様に. 左作用

$$G \times N \longrightarrow N$$

も定義する.

Cor 2.3.23

$$\begin{array}{ccc} \varphi : p^{-1}(x_0) \times \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & p^{-1}(x_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\gamma, [\gamma]) & \longmapsto & \varphi_\gamma(\gamma) \end{array}$$

は、基本群 $\pi_1(X, x_0)$ の $p^{-1}(x_0)$ への作用 (= φ_γ) である。

①

(lem 2.2.21) より, $\forall \gamma \in p^{-1}(x_0)$

$$\varphi(\gamma, [\gamma]) = \varphi_{[\gamma]}(\gamma) = \gamma \quad - \textcircled{1}$$

② (Cor 2.2.23) より

$$\begin{aligned} \varphi(\gamma, [\gamma_1] * [\gamma_2]) &= \varphi_{[\gamma_1] * [\gamma_2]}(\gamma) \\ &= (\varphi_{[\gamma_2]} \circ \varphi_{[\gamma_1]})(\gamma) \\ &= \varphi_{[\gamma_2]}(\varphi_{[\gamma_1]}(\gamma)) \\ &= \varphi_{[\gamma_2]}(\varphi(\gamma, [\gamma_1])) \\ &= \varphi(\varphi(\gamma, [\gamma_1]), [\gamma_2]) \end{aligned}$$

$$\therefore \varphi(\gamma, [\gamma_1] * [\gamma_2]) = \varphi(\varphi(\gamma, [\gamma_1]), [\gamma_2]) \quad - \textcircled{2}$$

①, ② より $\varphi : p^{-1}(x_0) \times \pi_1(X, x_0) \rightarrow p^{-1}(x_0)$ は
 $\pi_1(X, x_0)$ の $p^{-1}(x_0)$ への作用

□

Def 2.3.24

この基本群のファイバーの作用を
モノトミー (monodromy) とする。