§2.2 道とそのリフト

被覆空間を調べるのに、底空間の道が使える.

Def 2.2.1

位相空間 X 上の道 (path) とは、
閉区間 $[a,b]$ から X への連続写像

$$l : [a,b] \longrightarrow X$$

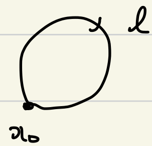
のことである.

$l(a)$ を始点，$l(b)$ を終点 とよぶ.

X の点 x_0 を決めたとき,

$$l(a) = l(b) = x_0$$

なる道を，x_0 を基点とするループ という.

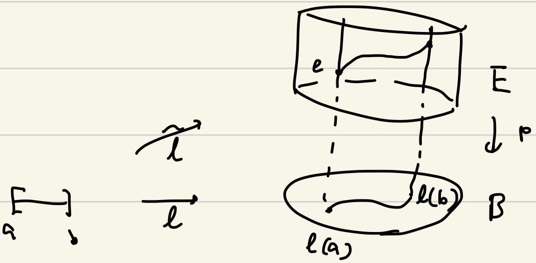


Thm 2.2.3 (道の持ち上げ)

被覆空間 $p: E \to B$ と、
B上の道 $l: [a,b] \to B$ に対し、

$p(e) = l(a)$ となる $e \in E$ をとる。
すると、$\tilde{l}(a) = e$ かつ $p \circ \tilde{l} = l$
となる E上の道 $\tilde{l}$ が一意的に存在する。

$$
\begin{tikzcd}
\{a\} \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\
{[a,b]} \arrow[r, "l"'] \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\tilde{l}"] & B
\end{tikzcd}
$$



Def 2.2.5

(Thm 2.2.3) の $\tilde{l}$ を、l の持ち上げ、あるいはリフト
と呼ぶ。

Prop 2.2.6

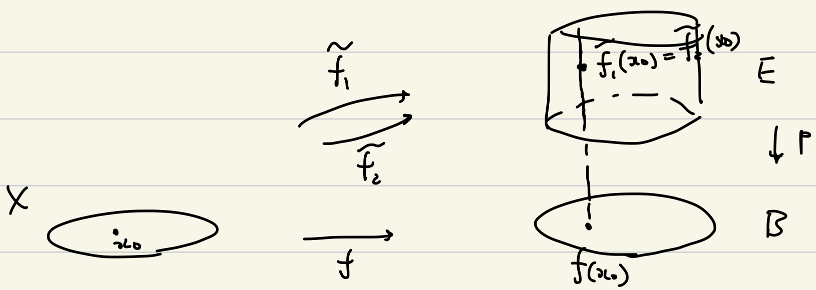
被覆空間 $p: E \longrightarrow B$ と、
連続写像 $f: X \longrightarrow B$ に対して、
$\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : X \longrightarrow B$ を、

$$p \circ \tilde{f}_1 = p \circ \tilde{f}_2 = f$$

をみたす連続写像として定める。
もし X が連結で、

$$\exists x_0 \in X \text{ s.t. } \tilde{f}_1(x_0) = \tilde{f}_2(x_0)$$

$$\Rightarrow \tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$$



∵ $X_0 = \{x \in X \mid \tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x)\}$ とおく。
条件より $X_0 \neq \phi$ $(\because \exists x_0 \in X \text{ s.t. } x_0 \in X_0)$
X が連結なので、X_0 が開かつ閉であることを示す。

[X_0 が開であること]

$^\forall x \in X_0,\quad ^\exists V\ (\subset X)$: open nbd of X

s.t. $x \in V \subset X_0$.

を示す。$x_0' \in X_0$ をとる。（$x_0 = x_0'$ とは限らない）

$\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を、被覆空間の条件をみたす B の開被覆とする。

$f(x_0')$ を含む U_α をとる。

$$p^{-1}(U_\alpha) = \coprod_{e \in p^{-1}(f(x_0'))} \widetilde{U}_{\alpha, e}$$ と分解し、

$$p|_{\widetilde{U}_{\alpha,e}} : \widetilde{U}_{\alpha,e} \longrightarrow U_\alpha$$ は同相写像になる。

$e_0 = \widetilde{f}_1(x_0') = \widetilde{f}_2(x_0')$ とおくと、$\widetilde{f}_1$, $\widetilde{f}_2$ の連続性から、

$\widetilde{f}_1(V) \subset \widetilde{U}_{\alpha, e_0}$, $\widetilde{f}_2(V) \subset \widetilde{U}_{\alpha, e_0}$

なる x_0' の開近傍 V が存在する。

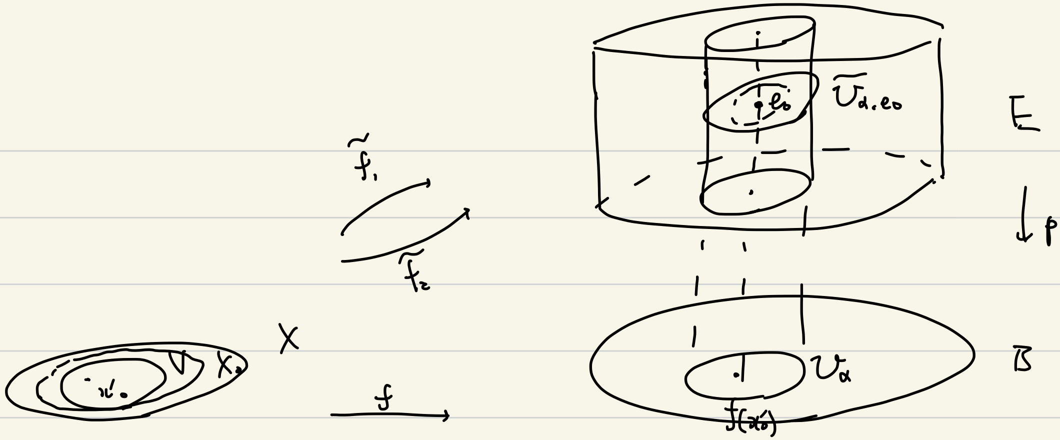
すると、$p \circ \widetilde{f}_1 = p \circ \widetilde{f}_2$ より、

$$\left(p|_{\widetilde{U}_{\alpha,e_0}}\right) \circ \left(\widetilde{f}_1|_V\right) = \left(p|_{\widetilde{U}_{\alpha,e_0}}\right) \circ \left(\widetilde{f}_2|_V\right)$$

となり、$p|_{\widetilde{U}_{\alpha,e_0}}$ が同相なので、$\widetilde{f}_1|_V = \widetilde{f}_2|_V$.

つまり、$^\forall x \in V,\quad \widetilde{f}_1(x) = \widetilde{f}_2(x)$

$\therefore\ x \in X_0$　これは $V \subset X_0$ ということ。$\therefore X_0$ は開.



[X_0 が 閉 であること]

$X \setminus X_0$ が 開 であることを示す

任意の $x \in X \setminus X_0$ に対し、$f(x) \in U_\beta$ となる $\beta \in A$ をとる。このとき、

$$p^{-1}(U_\beta) = \coprod_{e \in p^{-1}(f(x))} \tilde{U}_{\beta,e}$$

と分解し、$p|_{\tilde{U}_{\beta,e}} : \tilde{U}_{\beta,e} \to U_\beta$ は同相写像。

ここで、$x \notin X_0$ より $\tilde{f}_1(x) \neq \tilde{f}_2(x)$ なので、

$$\tilde{U}_{\beta,\tilde{f}_1(x)} \cap \tilde{U}_{\beta,\tilde{f}_2(x)} = \phi .$$

$\tilde{f}_1$, $\tilde{f}_2$ の連続性から x の開近傍 W で、

$$\tilde{f}_1(W) \subset \tilde{U}_{\beta,\tilde{f}_1(x)}, \quad \tilde{f}_2(W) \subset \tilde{U}_{\beta,\tilde{f}_2(x)}$$

となるものがとれる。

$\tilde{f}_1(W) \cap \tilde{f}_2(W) = \phi$ なので.

$W \subset X \setminus X_0$ となる. ∴ X_0 は閉集合.

以上により $X = X_0$ なので. $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ □

Def 2.2.7

距離空間 (X,d) の部分集合 A に対し.

$$\sup\{d(a,a') \mid a, a' \in A\}$$

が存在するとき. その値を $d(A)$ と表し.
A の直径 (diameter) とよぶ.

Lem 2.2.8 (Lebesgue の補題)

コンパクト距離空間 (X,d) の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$
に対し, $\sigma > 0$ で 次の性質をみたすものが存在する:
任意の部分集合 $A \subset X$ で. $d(A) < \sigma$
であるものに対し. $A \subset U_\lambda$ となる $\lambda \in \Lambda$ が存在する.

この σ を 被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の Lebesgue 数 という.

☺ $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が コンパクト空間 X の開被覆なので、
$\mathcal{U}$ に属する 有限個の 開集合 $U_1, \cdots, U_n$ を選んで、

$$X = U_1 \cup \cdots \cup U_n$$

とできる。
X 上の 実数値連続関数 $f_1, \cdots, f_n$ を、

$$f_i(x) = d(x, (X \setminus U_i)) \quad (i=1,\cdots,n)$$

とし、

$$f(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x) \quad (x \in X)$$

によって、X 上の 実連続関数 を 定める。
各 $f_i(x)$ は 負の 値 を とらず、$X = U_1 \cup \cdots \cup U_n$ より、
各点 $x \in X$ に 対して、$x \in U_i$ となる i が存在し、
$f_i(x) > 0$ となる。
よって、$^\forall x \in X$, $f(x) > 0$.

f は コンパクト空間上の 実連続関数 なので、
最小値 $\varepsilon > 0$ を 持つ。

正の 実数 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{n}$ が 求める 値 であることを示す。

X の部分集合 A の直径が δ より小さいと仮定し
$a \in A$ を任意に選んでおく.

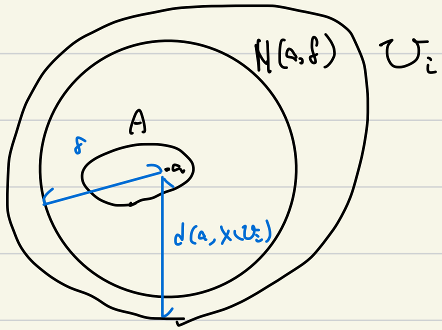
$$f_1(a) + \cdots + f_n(a) = f(a) \geqq \varepsilon = n\delta.$$

なので. $f_i(a) \geqq \delta = \dfrac{\varepsilon}{n}$ となる i が存在.
この i に対して.

$$A \subset N(a, \delta) \subset U_i$$

が成り立つ. □

$$f_i(a) = d(a, X \setminus U_i) \geqq \delta$$



Cor 2.2.9

閉区間 $[a,b]$ の任意の開被覆 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ に対し、

$[a,b]$ の2つの分割

$$a = s_0 < s_1 < \cdots < s_{m-1} < s_m < b$$

$$a < t_0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = b$$

で、次の条件をみたすものがとれる：

(1) 各 $1 \leq i \leq m-1$ に対し、

$$s_i < t_{i-1} < s_{i+1} < t_i$$

(2) $W_0 = [s_0, t_0)$, $W_1 = (s_1, t_1)$

$, \cdots, W_{m-1} = (s_{m-1}, t_{m-1})$, $W_m = (s_m, t_m]$.

とおいたとき、各 i に対し、$W_i \subset V_\alpha$ となる α が存在する。

(∵)

$[a,b]$ はコンパクト距離空間なので、

その開被覆 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ に対し、(Lem 2.2.8) の条件をみたす

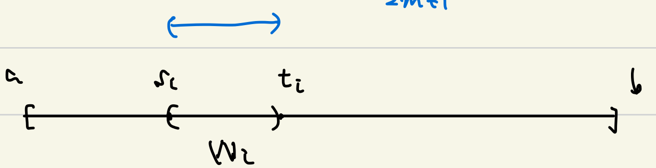
σ が存在する。

$\dfrac{3(b-a)}{2m+1} < \sigma$ となる $m \in \mathbb{N}$ をえらび,

$$\begin{cases} 0 < i \leq m \text{ に対し,} & s_i = a + \dfrac{2i-1}{2m+1}(b-a) \\ 0 \leq j < m \text{ に対し,} & t_j = a + \dfrac{2j+2}{2m+1}(b-a) \end{cases}$$

とおく.

$t_i - s_i = \dfrac{3(b-a)}{2m+1}$



各区間 W_i の直径 $d(W_i)$ は

$\dfrac{2(b-a)}{2m+1}$ or $\dfrac{3(b-a)}{2m+1}$

であり, $d(W_i) < \sigma$ なので, (Lem 2.2.8) より

$W_i \subset V_\alpha$ となる $\alpha \in A$ が存在する □

Rem 2.2.10

分割に関する条件は

(1) $\bigcup_i W_i = [a, b]$

(2) $W_i \cap W_{i+1} \neq \emptyset$

(3) $W_i \cap W_{i+2} = \emptyset$

となるように決めた.

Thm 2.2.3

被覆空間 $p: E \to B$ と、
B 上の道 $l: [a,b] \to B$ に対して、
$p(e) = l(a)$ となる $e \in E$ をとる。

すると、$\tilde{l}(a) = e$ かつ $p \circ \tilde{l} = l$ となる
E 上の道 $\tilde{l}$ が一意的に存在する。

(証)

$\tilde{l}$ をつくるために $[a,b]$ を分割する。
$\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を、被覆空間の条件をみたす B の開被覆とする。

道 l の連続性から、
$$[a,b] = \bigcup_{\alpha \in A} l^{-1}(U_\alpha)$$

は $[a,b]$ の開被覆。
この被覆に対し、(Cor 2.2.9) より得られる $[a,b]$ の被覆
$W_0, \dots, W_m$ を考える。

各 i に対し、$W_i \subset l^{-1}(U_{\alpha_i})$ となる U_{α_i} $(\alpha_i \in A)$ をとる。

[方針 : trivial covering のときは、引き戻して $\tilde{l}$ が定まる]

まず、W_0 について、被覆空間の定義から

$$p^{-1}(U_{\alpha_0}) = \coprod_{\gamma \in p^{-1}(l(a))} \tilde{U}_{\alpha_0,\gamma}$$

と分割するが、$e \in p^{-1}(l(a))$ なので、p の制限

$$p|_{\tilde{U}_{\alpha_0,e}} : \tilde{U}_{\alpha_0,e} \longrightarrow U_{\alpha_0}$$

は同相写像。そこで、

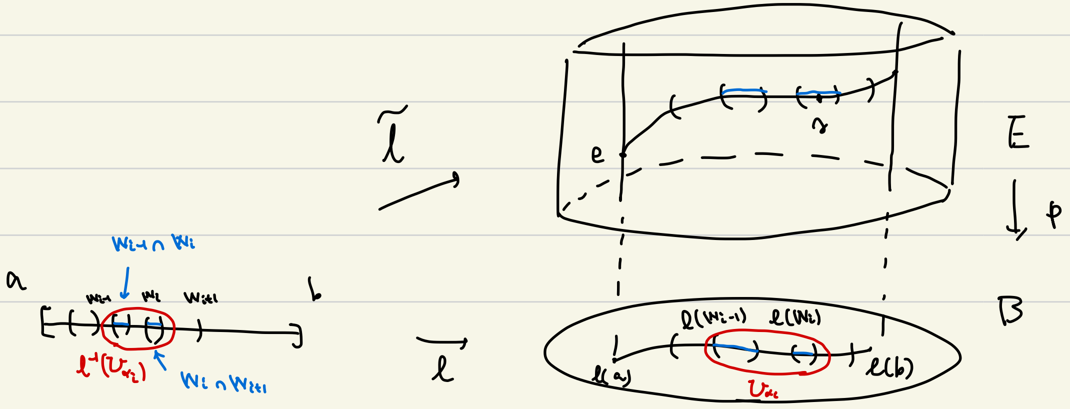
$$\tilde{l}_0 = (p|_{\tilde{U}_{\alpha_0,e}})^{-1} \circ (l|_{\overline{W_0}})$$

と定義する。

帰納的に、$l|_{W_{i-1}}$ のリフト $\tilde{l}_{i-1}$ によって、

$$\tilde{l}_i|_{W_{i-1} \cap W_i} = \tilde{l}_{i-1}|_{W_{i-1} \cap W_i}$$

であるものが構成できたとする。



$\tilde{l}_i$ の終点を y とすると.

$$p(y) \in l(W_i \cap W_{i+1})$$

より、

y を始点とする $l|_{\overline{W_{i+1}}}$ のリフト $\tilde{l}_{i+1}$ が存在する.

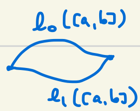
以上により構成された E 上の道 $\tilde{l}_1, \dots, \tilde{l}_m$ をつないで, 求める道 $\tilde{l}$ を得る.

□

Def 2.2.13

位相空間 X の道 $l_0, l_1 : [a,b] \longrightarrow X$ で,

$$l_0(a) = l_1(a),$$
$$l_0(b) = l_1(b)$$



をみたすものを考える.

このとき, l_0 から l_1 へのホモトピー (homotopy) とは, 連続写像

$$H : [a,b] \times [0,1] \longrightarrow X$$

で, 次の条件をみたすもののことをいう:

(1) $\forall s \in [a,b]$, $H(s,0) = l_0(s)$

(2) $\forall s \in [a,b]$, $H(s,1) = l_1(s)$

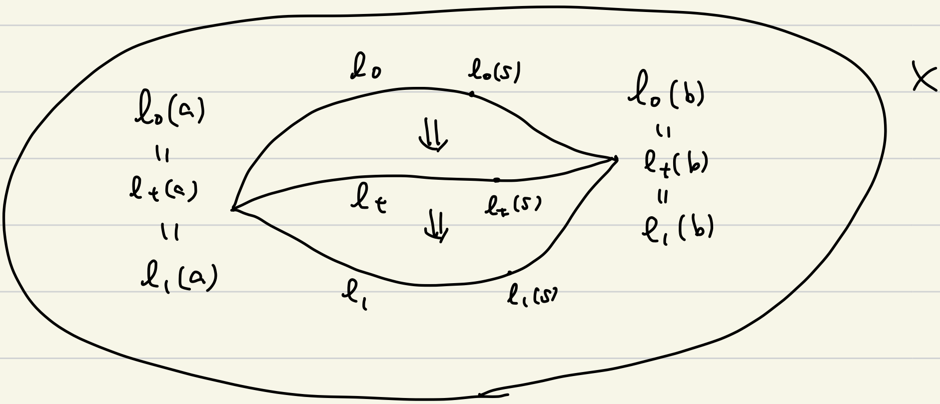
(3) $\forall t \in [0,1]$, $H(a,t) = l_0(a) = l_1(a)$

(4) $\forall t \in [0,1]$, $H(b,t) = l_0(b) = l_1(b)$.

このようなホモトピーが存在するとき、
l_0 と l_1 はホモトピック (homotopic) であるという。

$$l_0 \simeq l_1$$

で表す。



Def 2.2.15

弧状連結な空間 X は
任意の 2 点 $x_0, x_1 \in X$ と、この 2 点を結ぶ道

$$l_0, l_1 : [0,1] \longrightarrow X$$

に対し、常に $l_0 \simeq l_1$ となるとき、
単連結 (simply connected) であるという。

Thm 2.2.19

弧状連結な空間 B 上の被覆空間

$$p : E \longrightarrow B$$

と、B 上の連続な道

$$l_0, l_1 : [a,b] \longrightarrow B$$

そして、l_0 から l_1 へのホモトピー

$$H : [a,b] \times [0,1] \longrightarrow B$$

が与えられているとする。

$$\widetilde{l_0} : [a,b] \longrightarrow E$$

を l_0 のリフトとすると、ホモトピー

$$\widetilde{H} : [a,b] \times [0,1] \longrightarrow E$$

で、以下の条件をみたすものが存在。しかも一意的。

(1) $\widetilde{H}(s,0) = \widetilde{l_0}(s)$

(2) $p \circ \widetilde{H} = H$

さらに、$l_0(a) = l_1(a)$ かつ $l_0(b) = l_1(b)$ のとき、
H が始点と終点を止めるホモトピーならば、
$\widetilde{H}(a,t)$ と $\widetilde{H}(b,t)$ は t に依らず一定になる。
$(t \in [0,1])$

(1) p を自明化する B の open covering $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ をとり、

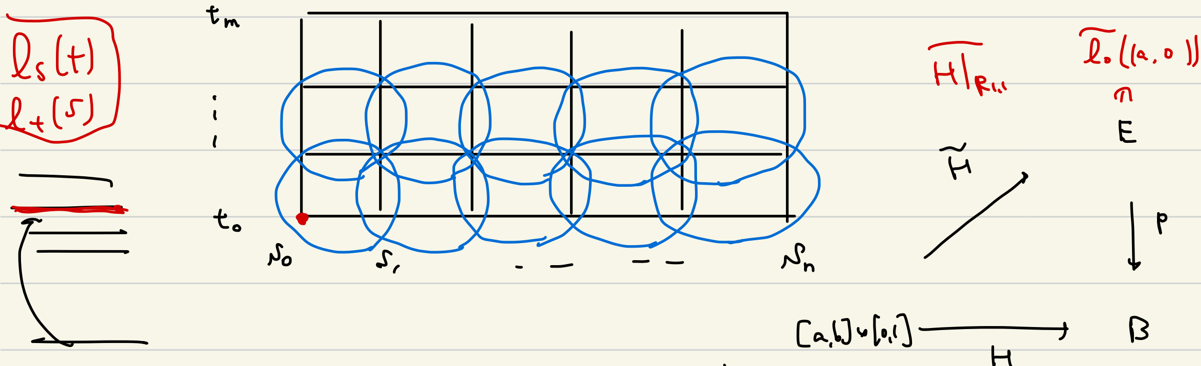
$[a,b] \times [0,1]$ の開被覆 $\{H^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ を考える。

$[a,b] \times [0,1]$ を細かく分割し、それにより

$[a,b] \times [0,1]$ を小さな長方形に分割する。

(Lebesgue の補題) より σ を Lebesgue 数とし、

小さな長方形の対角線が σ より小さくなるように分割すればよい。



$a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b$

$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$

$i=1, j=1$ などでは端を含むようにとる。

を、各長方形 $R_{ij} = (s_{i-1}, s_i) \times (t_{j-1}, t_j)$ の対角線が

σ より小さくなるような分割とする。

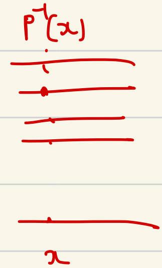
$H|_{\overline{R_{1,1}}}$ のリフト $\widetilde{H}|_{\overline{R_{1,1}}}$ が (Thm 2.2.3) と

同様に作れる。

$$\left(\widetilde{H}|_{\overline{R_{1,1}}} = \left(p|_{\widetilde{U}_{\alpha_{1,1},e}}\right)^{-1} \circ \left(l|_{\overline{R_{1,1}}}\right) \right)$$

など

各 i,j に対し、 $H(R_{i,j}) \subset U_{\alpha_{i,j}}$ $\subset B$ となる $\alpha_{ij} \in A$ をえらぶ.

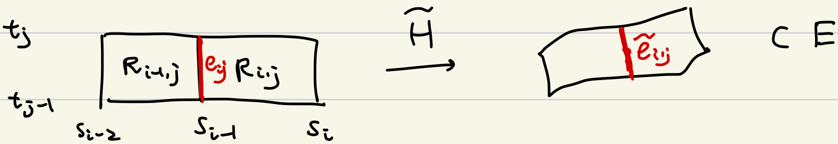


$$p^{-1}(U_{\alpha_{i,j}}) = \coprod_{\substack{y \in p^{-1}(x) \\ x \in H(\overline{R_{ij}})}} \widetilde{U}_{\alpha_{ij},\, y}$$

と分解し、

$$p|_{\widetilde{U}_{\alpha_{ij},\, \tilde{e}_{i,j}}} : \widetilde{U}_{\alpha_{ij},\, \tilde{e}_{ij}} \longrightarrow U_{\alpha_{i,j}}$$

は同相写像



ここで、 $e_{ij} \in \{s_{i-1}\} \times [t_{j-1}, t_j]$, $\tilde{e}_{ij} = \widetilde{H}(e_{ij})$

そこで、 $\widetilde{H}_{ij} = (p|_{\widetilde{U}_{\alpha_{ij}}\, \tilde{e}_{ij}})^{-1} \circ (H|_{\overline{R_{ij}}})$
と定義する.

$\{\widetilde{H}_{ij}\}$ を貼り合わせて.

$$\widetilde{H} : [a,b] \times [0,1] \longrightarrow E$$

が得られる. (lem 2.2.6) より、一意的

もし H が始点と終点を止めるホモトピーなら、
$\widetilde{H}(a,t)$ $(= l_t(a))$ を道とみなすと、
これは一点に留まっている道のリフトになる。
リフトの一意性により、$\widetilde{H}(a,t)$ も一点に留まっている道。
$\widetilde{H}(b,t)$ $(= l_t(b))$ についても同様

□

道とホモトピーのリフトを用いると、弧状連結な空間の上の被覆空間のファイバーはすべて同じであることが分かる。

(ファイバー束)

Def 2.2.20

被覆空間 $p: E \to B$ と
$x_0, x_1 \in B$ を結ぶ道 l に対し、
以下のように写像

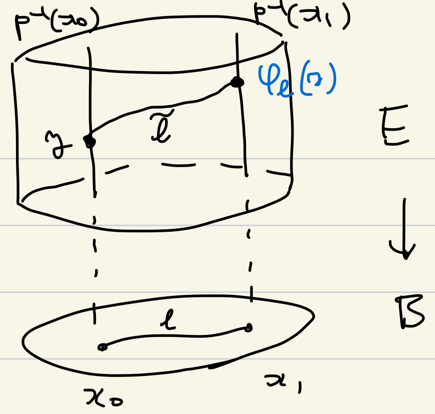
$$\varphi_l : p^{-1}(x_0) \longrightarrow p^{-1}(x_1)$$

を定める：

$y \in p^{-1}(x_0)$ に対して、
y を始点とする l のリフト $\widetilde{l}_y$ がある。
$\widetilde{l}_y(1) \in p^{-1}(x_1)$ なので、y に対し、

$$\varphi_l(y) = \widetilde{l}_y(1)$$

と定義する。



Lem 2.2.21

被覆空間 $p: E \to B$ に対し、
(Def 2.2.20) の対応は次の性質を持つ：

(1) $x_0, x_1 \in B$ を結ぶ2つの道

$$\ell_0, \ell_1 : [a,b] \longrightarrow B$$

に対し、もし $\ell_0 \simeq \ell_1$ ならば $\varphi_{\ell_0} = \varphi_{\ell_1}$

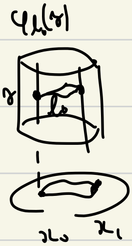
(2) $\ell_1 : [a,b] \longrightarrow B$ と
$\ell_2 : [b,c] \to B$ を、B上の道で、
$\ell_1(b) = \ell_2(b)$ であるものとする。
このとき、

$$\varphi_{\ell_1 \cup \ell_2} = \varphi_{\ell_2} \circ \varphi_{\ell_1}$$

(3) C_{x_0} を $x_0 \in B$ に留まっている道とするとき、

$$\varphi_{C_{x_0}} = 1_{p^{-1}(x_0)}$$

(i) (1) $l_0 \simeq l_1$ のとき、対応するホモトピーを H とする。



$y \in p^{-1}(x_0)$ に対し、y を始点とする l_0 のリフトを $\tilde{l}_0$ とすると、(Thm 2.2.19) より

$$\tilde{H}\big|_{[a,b]\times\{0\}} = \tilde{l}_0$$

となる H のリフト $\tilde{H}$ が一意的に存在する。

このとき、$\tilde{H}(b,t)$ は t によらず一定だったので、

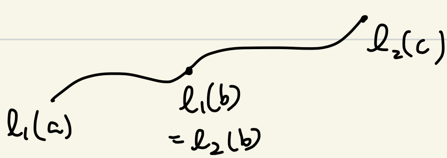
$$\varphi_{l_0}(y) = \varphi_{l_t}(y) = \varphi_{l_1}(y)$$

(ここで、$l_t = H\big|_{[a,b]\times\{t\}}$ $(t \in [0,1])$)

(2) $l_1 : [a,b] \to B$, $l_2 : [b,c] \to B$ を $l_1(b) = l_2(b)$ なる道とする。このとき、

$$(l_1 \cup l_2)(t) = \begin{cases} l_1(t) & a \le t \le b \\ l_2(t) & b \le t \le c \end{cases}$$

として、道 $l_1 \cup l_2 : [a,c] \to B$ を定める。



$l_1(a)$ 上のファイバーの点 $e_1 \in E$ をとり、

e_1 を始点とする l_1 のリフトを $\tilde{l}_1$ とする。

このとき、

$$\tilde{l}_1(b) \in p^{-1}(l_1(b)) = p^{-1}(l_2(b))$$

なので、

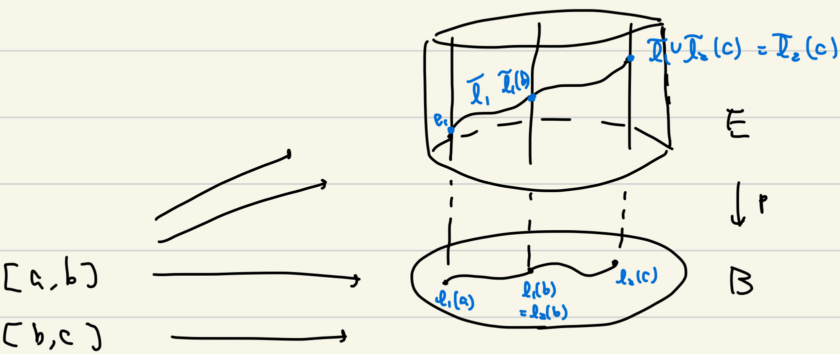
$\tilde{l}_1(b)$ を始点とする l_2 のリフト $\tilde{l}_2$ がとれる。

そして、

$$\tilde{l}_1 \cup \tilde{l}_2 : [a,c] \longrightarrow E$$

は、

e_1 を始点とする $l_1 \cup l_2$ のリフトになっている。



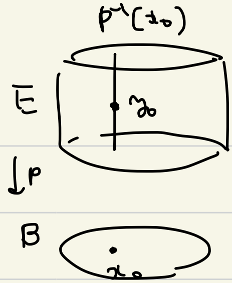
よって、

$$\begin{aligned}\varphi_{l_1 \cup l_2}(y) &= \tilde{l}_1 \cup \tilde{l}_2(c) \\ &= \tilde{l}_2(c) \\ &= \varphi_{l_2}(\tilde{l}_1(b)) \\ &= \varphi_{l_2}(\varphi_{l_1}(y))\end{aligned}$$

(3) ある点 $x_0 \in B$ で動かない道. つまり

$$\forall t \in [a,b], \quad l(t) = x_0$$

となる道を c_{x_0} と表すことにする.



$y_0 \in E$ で, $p(y_0) = x_0$ であるもの, とすると,

c_{y_0} は c_{x_0} の y_0 を始点とするリフトである.

つまり $\varphi_{c_{x_0}}(y) = y \quad (\forall y \in p^{-1}(x_0))$

$\therefore \quad \varphi_{c_{x_0}} = id_{p^{-1}(x_0)}$.

□

Def 2.2.22

位相空間 X 上の道

$$l_1, l_2 : [0,1] \longrightarrow X$$

で,

$$l_1(1) = l_2(0)$$

であるものに対し, その結合 $l_1 * l_2$ を,

$$(l_1 * l_2)(t) = \begin{cases} l_1(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ l_2(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

で定義する.

Cor 2.2.23

$p : E \to B$ を被覆空間とし,

$l_1 : [0,1] \to B$

$l_2 : [0,1] \to B$

を, B上の道で

$$l_1(1) = l_2(0)$$

とする. このとき,

$$\varphi_{l_1 * l_2} = \varphi_{l_2} \circ \varphi_{l_1}$$

∵

(Lem 2.2.21) の (2) より

□

Prop 2.2.24

B : 弧状連結

$p : E \to B$; 被覆空間.

このとき, 任意の $x_0, x_1 \in B$ に対し,

$p^{-1}(x_0)$ と $p^{-1}(x_1)$ の間に全単射がある.

∵ B が弧状連結なので、
x_0 と x_1 とをつなぐ B 上の道
$$l : [0,1] \longrightarrow B$$
があり、これを用いて写像
$$\varphi_l \ : \ p^{-1}(x_0) \longrightarrow p^{-1}(x_1)$$
を得る。
一方、x_1 から x_0 へ向かう道を、
$$\nu(l)(t) := l(1-t)$$
で定めると、
この道を用いて、写像
$$\varphi_{\nu(l)} \ : \ p^{-1}(x_1) \longrightarrow p^{-1}(x_0)$$
ができる。
φ_l と $\varphi_{\nu(l)}$ が互いに逆写像であることを示す。
まず、
$$\varphi_{\nu(l)} \circ \varphi_l = \varphi_{l * \nu(l)}$$
であり、
$l * \nu(l)$ と「$l(0)$ に留まっている道 $c_{l(0)}$」
の間のホモトピーが
$$H(s,t) = \begin{cases} l(2st) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ l((2-2s)t) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$
で与えられる。（Prop 2.3.15 で示す）

(Lem 2.2.21) のホモトピー不変性より.

$$\varphi_{l * \nu(l)} = \varphi_{c_{l(0)}}$$

(Lem 2.2.21) より. $\varphi_{c_{l(0)}}$ は恒等写像

同様に. $\varphi_l \circ \varphi_{\nu(l)}$ も恒等写像. $\square$