第2章　雛形としての被覆空間

2.1 被覆空間

Def 2.1.1

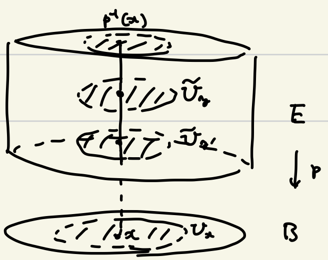
B : 連結な Top. sp.

B 上の <u>被覆空間 (covering space)</u> とは、

・連続写像 $p : E \to B$ で、
任意の $x \in B$ に対し、次の条件をみたす x の open nbd U_x、
各点 $y \in p^{-1}(x)$ の open nbd $\widetilde{U}_y$ が存在するもの：

$$\begin{cases} (1) & y \neq y' \Rightarrow \widetilde{U}_y \cap \widetilde{U}_{y'} = \phi \\ (2) & p(\widetilde{U}_y) \subset U_x \text{ で、} \\ & p|_{\widetilde{U}_y} : \widetilde{U}_y \to U_x \text{ は同相写像.} \end{cases}$$

・B を <u>底空間 (base space)</u>
・E を <u>全空間 (total space)</u>
・p を <u>射影 (projection)</u>
・$p^{-1}(x)$ を x 上の <u>ファイバー (fiber)</u> という.



Rem

条件 (2) より. $p^{-1}(U_x) = \coprod_{y \in p^{-1}(x)} \widetilde{U}_y$.

各 $\widetilde{U}_y$ は U_x と同相なので, $U_x \times \{y\}$ と同一視できる.

$$\therefore \quad p^{-1}(U_x) = \coprod_{y \in p^{-1}(x)} \widetilde{U}_y$$

$$\cong \coprod_{y \in p^{-1}(x)} \left(U_x \times \{y\} \right)$$

$$= U_x \times p^{-1}(x)$$

これを局所自明化 (local trivialization) という.

例 2.13

$S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$ を考える.

$$\begin{array}{rccc} p_2 : & S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & z & \longmapsto & z^2 \end{array}$$

は 被覆空間 になる.

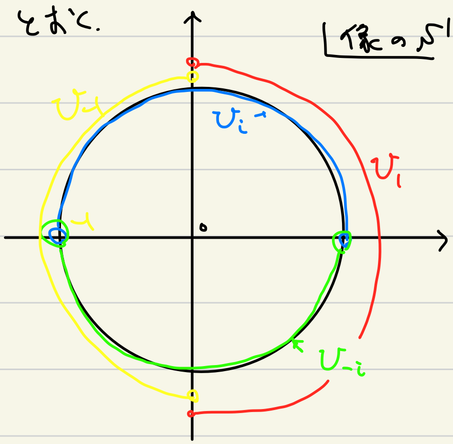
∵)

$w = w_1 + i w_2 \in S^1$ に対し、

S^1における w の open nbd ～

$$U_w = \begin{cases} \{x+iy \in S^1 \mid y>0\}, & w_2>0 \\ \{x+iy \in S^1 \mid y<0\}, & w_2<0. \\ \{x+iy \in S^1 \mid x>0\}, & w=1. \\ \{x+iy \in S^1 \mid x<0\}, & w=-1 \end{cases}$$

とおく。



$w = w_1 + iw_2$ が $w_2 > 0$ のとき. (cf. U_i)

$$\begin{aligned} p_2^{-1}(U_w) &= \{z \in S^1 \mid z^2 \in U_w\} \\ &= \{e^{i\theta} \in S^1 \mid 0 \leq \theta < 2\pi,\ \sin 2\theta > 0\} \\ &= \{e^{i\theta} \in S^1 \mid 0 < \theta < \tfrac{\pi}{2}\} \\ &\quad \cup \{e^{i\theta} \in S^1 \mid \pi < \theta < \tfrac{3}{2}\pi\}. \end{aligned}$$

また、 $w = e^{i\xi}$ と表すと.

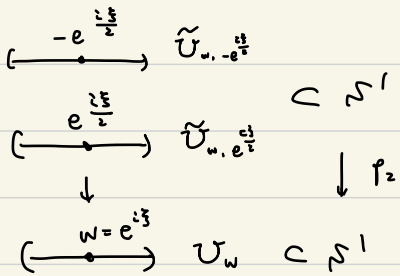
$$\begin{aligned} p_2^{-1}(w) &= \{e^{\frac{i\xi}{2}}, e^{\frac{i(\xi+2\pi)}{2}}\} \\ &= \{e^{\frac{i\xi}{2}}, -e^{\frac{i\xi}{2}}\} \end{aligned}$$

よって、
$$\begin{cases} \tilde{U}_{w, e^{\frac{i\xi}{2}}} = \{e^{i\theta} \in S^1 \mid 0 < \theta < \tfrac{\pi}{2}\} \\ \tilde{U}_{w, -e^{\frac{i\xi}{2}}} = \{e^{i\theta} \in S^1 \mid \pi < \theta < \tfrac{3}{2}\pi\} \end{cases}$$
とおけば.

これらはそれぞれ $e^{\frac{i\xi}{2}}$, $-e^{\frac{i\xi}{2}}$ の近傍.

他の $w \in S^1$ でも同様のことが示せる.

よって, p_2 は被覆空間の条件をみたす.



$x \in B$ ごとに近傍 U_x をとると無駄が多い!

($x' \in U_x$ なら $U_{x'} = U_x$ で節約).

Prop 2.1.4 (開被覆による被覆空間の定義).

B : 連結な空間

連続写像

$$p : E \to B$$

が B 上の被覆空間である必要十分条件は、

B の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ と

各 $\alpha \in A$ と $x \in U_\alpha$ と $y \in p^{-1}(x)$ に対し、

y の開近傍 $\tilde{U}_{\alpha, y}$ で以下の条件をみたすものが存在すること：

(1) $y \neq y' \Rightarrow \tilde{U}_{\alpha, y} \cap \tilde{U}_{\alpha, y'} = \phi$.

(2) $p(\tilde{U}_{\alpha, y}) \subset U_\alpha$ で、

$p|_{\tilde{U}_{\alpha, y}} : \tilde{U}_{\alpha, y} \to U_\alpha$ は同相写像.

例 2.1.5

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し、

$$p_n : \begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ z & \longmapsto & z^n \end{array}, \quad \exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & S^1 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ t & \longmapsto & e^{2\pi i t} \end{array}$$

は被覆空間.

[proof]

$$\begin{array}{cccc} p_n : & S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & z & \longmapsto & z^n \end{array}$$

が被覆空間であることを示す.

$w = w_1 + i w_2 \in S^1$ (下の S^1) に対して.

開近傍 U_w を次で定める.

$$U_w = \begin{cases} \{ x+iy \in S^1 \mid y > 0 \} & (w_2 > 0 \text{ のとき}) \\ \{ x+iy \in S^1 \mid y < 0 \} & (w_2 < 0 \text{ のとき}) \\ \{ x+iy \in S^1 \mid x > 0 \} & (w = 1 \text{ のとき}) \\ \{ x+iy \in S^1 \mid x < 0 \} & (w = -1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(先程と同じ).

例えば $w \in S^1$ が $w_2 > 0$ をみたすとき.

$e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \underbrace{\sin(n\theta)}_{>0}$.

$$\begin{aligned} p_n^{-1}(U_w) &= \{ z \in S^1 \mid z^n \in U_w \} \\ &= \{ e^{i\theta} \in S^1 \mid 0 \leq \theta < 2\pi,\ \sin(n\theta) > 0 \} \\ &= \bigcup_{k=0}^{n-1} \{ e^{i\theta} \in S^1 \mid 2k\pi < n\theta < (2k+1)\pi \} \end{aligned}$$

(下の S^1 で) $w = e^{i\theta}$ と表すと.

$$p_n^{-1}(w) = \left\{ e^{\frac{i\theta}{n}}, \cdots, e^{\frac{i}{n}(\theta + 2k\pi)}, \cdots, e^{\frac{i}{n}(\theta + (2n-1)\pi)} \right\}$$

$(k = 0, 1, \cdots, n-1)$

よって. $\tilde{U}_k = \left\{ e^{i\theta} \in S^1 \;\middle|\; \frac{2k\pi}{n} < \theta < \frac{(2k+1)\pi}{n} \right\}$ とおくと.

$$\begin{array}{cccc} p_n : & S^1 & \to & S^1 \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & z & \longmapsto & z^n \end{array}$$

が $\underbrace{\text{被覆空間}}_{U_w \text{上で}}$ の条件をみたすことが分かる.

$w = 0$, $w = 1$, $w = -1$ のときも同様で.

$$\begin{array}{cccc} p_n : & S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & z & \longmapsto & z^n \end{array}$$

は 被覆空間.

次に.

$$\begin{array}{cccc} \exp : & \mathbb{R}^1 & \longrightarrow & S^1 \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & t & \longmapsto & \exp(2\pi i t) \end{array}$$

が

被覆空間であることを示す.

$w = w_1 + i w_2 \in S^1$ に対し. 先程と同様に

周近傍 U_w を定める.

例えば $w_2 > 0$ のとき

$$\begin{aligned}
\exp^{-1}(U_w) &= \{ t \in \mathbb{R} \mid e^{2\pi i t} \in U_w \} \\
&= \{ t \in \mathbb{R} \mid \sin(2\pi t) > 0 \} \\
&= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{ t \in \mathbb{R} \mid 2k\pi < 2\pi t < (2k+1)\pi \} \\
&= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{ t \in \mathbb{R} \mid k < t < k + \tfrac{1}{2} \}
\end{aligned}$$

よって $\tilde{U}_k := \{ t \in \mathbb{R} \mid k < t < k + \frac{1}{2} \}$ とおくと、

被覆空間の条件 (1) (2) をみたし、他も同様。

$\therefore$ $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ は被覆空間 □