Thm 5.35

$X, Y$ : smooth projective varieties.

Fourier-Mukai 関手

$$\Phi : D^b(X) \longrightarrow D^b(Y)$$

を考える. このとき. 次が成立.

(i) $\Phi$ が fully-faithful であることと.

$\forall x_1, x_2 \in X$,

$$\mathrm{Hom}^i(\Phi(\mathcal{O}_{x_1}), \Phi(\mathcal{O}_{x_2})) = \begin{cases} \mathbb{C} & \left(\begin{array}{c} x_1 = x_2 \\ \text{かつ} \\ i = 0 \end{array}\right) \\ 0 & \left(\begin{array}{l} x_1 \neq x_2 \text{ または} \\ i \notin [0, \dim X] \end{array}\right) \end{cases}$$

が成り立つことは同値.

Cohomology の直交条件.

(ii) $\Phi$ が fully-faithful とする. このとき.

$\Phi$ が圏同値であることと.

$$\forall x \in X, \quad \Phi(\mathcal{O}_x) \otimes \omega_Y \cong \Phi(\mathcal{O}_x)$$

が成り立つことは同値.

(∵)

(i) $\Phi$ が fully-faithful なら

$$\mathrm{Hom}^i(\Phi(\mathcal{O}_{x_1}), \Phi(\mathcal{O}_{x_2}))$$

$$\cong \mathrm{Hom}^i(\mathcal{O}_{x_1}, \mathcal{O}_{x_2}) = \begin{cases} \mathbb{C} & \begin{pmatrix} x_1 = x_2 \text{ かつ} \\ i = 0 \end{pmatrix} \\ 0 & \begin{pmatrix} x_1 \neq x_2 \text{ または} \\ i \notin [0, \dim X] \end{pmatrix} \end{cases}$$

逆向きについて。

- $\Phi$ の核が $Y$ 上平坦なときは。
(Thm 5.33) とまったく同様。

- $\Phi$ の核が $Y$ 上平坦でないとき。

$$\mathrm{Ext}^1_X(\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_x) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_X(\Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_x), \mathcal{O}_x)$$

の単射性はすぐに分からない。
あとで示す。

(ii) $\Phi$ が同値なら (Lem 4.1) より $\dim X = \dim Y$.

このとき.

$$\Phi \circ S_{D^b(X)}(\mathcal{O}_x)$$

$$= \Phi(\mathcal{O}_x \otimes \omega_X[\dim X])$$

$$\cong \Phi(\mathcal{O}_x)[\dim Y]$$

$\mathcal{O}_x \otimes \omega_X \cong \mathcal{O}_x$

$$S_{D^b(Y)} \circ \Phi(\mathcal{O}_x)$$

$$\cong \Phi(\mathcal{O}_x) \otimes \omega_Y [\dim Y]$$

で, (問 3.7 (ii)) より $\Phi$ が同値なら.

$$\Phi \circ S_{D^b(X)} \cong S_{D^b(Y)} \circ \Phi.$$

$$\therefore \quad \Phi(\mathcal{O}_x) \otimes \omega_Y \cong \Phi(\mathcal{O}_x).$$

逆向きについて. ( $\dim X = \dim Y$ なら Thm 3.18 )

$E \in D^b(X)$, $x \in X$, $i \in \mathbb{Z}$ に対し.

$$\mathrm{Hom}^i(\mathcal{O}_x, \Phi^L(E)) \cong \mathrm{Hom}^{i+\dim Y - \dim X}(\mathcal{O}_x, \Phi^R(E))$$

(Thm 3.18 と同じ).

$\Omega = \{\mathcal{O}_x \mid x \in X\}$ はスパニング類なので、

$$\Phi^R(E) \cong 0 \Rightarrow \Phi^L(E) \cong 0$$

よって、(Prop 3.17) より $\Phi$ は圏同値。 □

**Rem. Prop 3.17**

$\mathcal{C}$ : 非自明な三角圏。
$\mathcal{D}$ : 直既約な三角圏

$E \in \mathcal{D}$ に対し、
「$\Phi^R(E) \cong 0 \Rightarrow \Phi^L(E) \cong 0$」
が成り立つとき、$\Phi$ は三角圏の圏同値。

[Thm 5.35 (i) $\mathcal{E}$ が $Y$ と平坦でないとき] [Bridgeland '99]

(問 3.1 (iii)) より,

$$Q := \mathbb{R}\pi_{X\times X *}\left(\mathbb{L}\pi^*_{X\times Y}\mathcal{E} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathbb{L}\pi^*_{Y\times X}\mathcal{E}^L\right)$$

とおくと. $\Phi^{\mathcal{E}^L}_{Y\to X}\circ\Phi^{\mathcal{E}}_{X\to Y} = \Phi^{Q}_{X\to X}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & & X\times Y\times X \arrow[dll] \arrow[d] \arrow[drr] & & & & \\
\mathcal{E} \arrow[r] & & X\times Y \arrow[dl] \arrow[dr] & & X\times X & & Y\times X \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathcal{E}^L \arrow[ll] \\
 & X & & Y & Q \arrow[u] & Y & & X &
\end{tikzcd}$$

(∵) $\mathrm{Hom}^i(\Phi^Q_{X\to X}(\mathcal{O}_x), \mathcal{O}_x)$
$\cong \mathrm{Hom}^i(\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_x)$
は $i \notin [0, \dim X]$ で $0$.

↓

$\Phi^Q_{X\to X}(\mathcal{O}_x)$ が各 $x\in X$ で層になることから.

$Q$ は $X$ 上平坦な層. ([Bridgeland '99 Lem 4.3])
(Huybrechts (Lem 3.31))

さらに,

$$\begin{tikzcd}
(T_x X =)\ \mathrm{Ext}^1_{D^b(X)}(\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_x) \arrow[rr] \arrow[dr] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Ext}^1_{D^b(X)}(\Phi^Q_{X\to X}(\mathcal{O}_x), \Phi^Q_{X\to X}(\mathcal{O}_x)) \\
 & \mathrm{Ext}^1_{D^b(X)}(\Phi^{\mathcal{E}}_{X\to Y}(\mathcal{O}_x), \Phi^{\mathcal{E}}_{X\to Y}(\mathcal{O}_x)) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

は. 小平・スペンサー写像.

**Lem** (Bridgeland '99 Lem 5.2)

$X$ : projective variety $/\mathbb{C}$

$Q$ : $x \in X$ に台を持つ $X$ 上の層. とする.

$$\mathrm{Hom}_X(Q, \mathcal{O}_x) = \mathbb{C}$$

が成り立つなら. $Q$ は $X$ の 0次元閉部分スキームの構造層.

$\mathcal{O}_X \twoheadrightarrow Q$

∵ short exact sq.

$$0 \to P \xrightarrow{i} Q \xrightarrow{g} \mathcal{O}_x \longrightarrow 0 \quad (\text{ex.})$$

が存在. ここで. 全射でない層の間の射.

$$f : \mathcal{O}_X \to Q$$

を考える.

$\mathcal{O}_X \xrightarrow{j} P \xrightarrow{i} Q$, $f$

方針 (全射でない $\Rightarrow$ $\exists j : \mathcal{O}_X \to P$ s.t. $f = i \circ j$.
かつ. $\dim H^0(X, P) < \dim H^0(X, Q)$
だから. 全射になる $f' : \mathcal{O}_X \to Q$ も存在する.)

$f : \mathcal{O}_X \to Q$ ：全射でない． について．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X \arrow[r, "f"] & Q \arrow[r, "\tilde{h}"] \arrow[dr, "h"'] & \mathrm{Coker}(f) \arrow[r] \arrow[d, "\exists \varphi"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] & 0. \\
 & & \mathcal{O}_X &
\end{tikzcd}
$$

$\mathrm{Coker}(f)$ の普遍性から

$$h \circ f = 0$$

となる 0 ではない射 $h : Q \to \mathcal{O}_X$ が存在．

仮定 $\mathrm{Hom}_X(Q, \mathcal{O}_X) = \mathbb{C}$ より

$h$ は $g$ の定数倍．

$$\left( 0 \to P \to Q \xrightarrow{g} \mathcal{O}_X \to 0 \quad - ※ \right)$$

$$\therefore \quad g \circ f = c\,(h \circ f) = 0.$$

※ に $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, -)$ を施して．次の exact sq. を得る．

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, P) \arrow[r, "i\circ"] & \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, Q) \arrow[r, "g\circ"] & \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \\
 & & f \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] \arrow[r, mapsto] & g \circ f \arrow[u, phantom, sloped, "\in"]
\end{tikzcd}
$$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O}_X \arrow[dl, "j"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr] & \\ P \arrow[r, "i"'] & Q \arrow[r, "g"'] & \mathcal{O}_x \end{tikzcd}$$

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, P) \xrightarrow{i_\circ} \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, Q) \xrightarrow{g_\circ} \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_x)$$

$$f \longmapsto g \circ f$$

$g \circ f = 0$ より. $f \in \ker(g_\circ) = \mathrm{Im}(i_\circ)$

$\therefore \ \exists j \in \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, P)$ s.t. $f = i \circ j$

一方, $P, Q$ の台は $\{x\}$ で.

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(X, P) = \chi(P) < \chi(Q) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, Q)$$

ゆえに、全射であるような射

$$f' : \mathcal{O}_X \to Q$$

が存在する. □

$$(0 \to I_Z \to \mathcal{O}_X \to Q \to 0)$$

Lem (Bridgeland '99 Lem 5.3)

$X$ : projective variety $/\mathbb{C}$.
$S$ : variety (projective とは限らない)

$Q$ を、$S$ 上平坦な $S\times X$ 上の層であって、各 $s\in S$ について、$Q_s$ が $X$ の 0 次元閉部分スキームの構造層であるようなもの、とする。

また、

$$\forall s_1, s_2 \in S,$$

$$Q_{s_1} \cong Q_{s_2} \Rightarrow s_1 = s_2$$

を仮定する。

このとき、$Q$ に関する小平-スペンサー写像

$$(T_s S =) \operatorname{Ext}^1_{D^b(S)}(\mathcal{O}_s, \mathcal{O}_s) \to \operatorname{Ext}^1_{D^b(X)}(Q_{s}, Q_{s})$$

が単射になるような $s\in S$ が存在する。

$S$ を Affine と仮定してよい.

$s \in S$ を固定.

$\pi : S \times X \to S$ を射影とする.

base-change thm (Hartshorne Ch. 3 Thm 12.11) より

$$H^0(S \times X, Q) \longrightarrow H^0(X, Q_s)$$

は全射. なので.

$$g : \mathcal{O}_{S \times X} \longrightarrow Q \quad (\in H^0(S \times X, Q))$$

であって. $\{s\} \times X \subset S \times X$ への制限

$$g_s : \mathcal{O}_X \longrightarrow Q_s$$

が全射になるものが存在.

$S$ のある open subset に制限して考えることで

はじめから $g$ が全射としてよい.

このとき, $Q$ は $S \times X$ の閉部分スキームの

構造層とみなせる.

$$\left( g : \mathcal{O}_{S \times X} \twoheadrightarrow Q = \mathcal{O}_{S \times X} / I_Z \right).$$

このとき、反変函手

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{H}ilb^P_X : & (Sch/\mathbb{C}) & \longrightarrow & (Sets) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & S & \longmapsto & \mathcal{H}ilb^P_X(S) \end{array}$$

$$\mathcal{H}ilb^P_X(S) = \left\{ Z \subset X \times S \;\middle|\; \begin{array}{l} Z : X\times S \text{ の closed subscheme} \\ \begin{tikzcd} Z \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "\pi"'] & & X \times S \arrow[dl, "p_2"] \\ & S & \end{tikzcd} : \pi \text{ は flat} \end{array} \right\}$$

$$P = \{ Q_s \text{ の Hilbert 多項式} \}$$
$$( P_s(m) = \chi(\mathcal{O}_{Z_s} \otimes \mathcal{O}_X(m)) )$$

を考えると、$\mathcal{H}ilb^P_X$ を表現するスキーム $\mathrm{Hilb}^P(X)$ が存在する。

$\mathcal{E}$ を $\mathrm{Hilb}^P(X) \times X$ 上の普遍層とする。

このとき、$\exists f : S \to \mathrm{Hilb}^P(X)$

s.t. $Q = (f \times 1_X)^* \mathcal{E}$.

目的の小平スペンサー写像は、

$$\begin{tikzcd} T_s S \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & T_{f(s)} \mathrm{Hilb}^P(Y) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_{f(s)}, \mathcal{E}_{f(s)}) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} T_s S \arrow[r, "T_s(f)"] \arrow[rr, bend right] & T_{f(s)} \mathrm{Hilb}^P(Y) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_{f(s)}, \mathcal{E}_{f(s)}) \end{tikzcd}$$

$Q_{s_1} \cong Q_{s_2} \Rightarrow s_1 = s_2$

仮定より $f : S \to \mathrm{Hilb}^P(Y)$ は単射.

$S'$ : $f$ による $S$ のスキーム論的像 とする,

$\mathbb{C}$ 上（標数 0 の体上）で考えているので,
[Hartshorne Ch.3 (Cor 10.7)] より.

$S, S'$ : 非特異
$f' : S \longrightarrow S'$ は 滑らか.

としてよい.
$f$ は単射で, $f'$ の相対次元 0 なので,
$T_s(f)$ は すべての $s \in S$ で 単射

$$T_{f(s)} \mathrm{Hilb}^P(Y) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_{f(s)}, \mathcal{E}_{f(s)})$$

の単射性は $\mathcal{E}$ の universality から従う □

[単射性の証明]

$s \in S,\ S \subset X$ について、

$Q_s$ $\left(:= \Phi^{Q}_{X \to X}(\mathcal{O}_s)\right)$ は $\{s\}$ に台を持つ層なので

$$f : s \longmapsto Q_s$$

は単射. よって、 $T_s(f)$ は単射.

よって、先程の2つのLemから、ハフスペンサー写像は単射。