X : smooth proj. var.

以下, X に対する Hochschild コホモロジー (ホモロジー) を定義する.

$HH(X)$: 2重次数付き環 を次のように定める:

$$\Delta : X \hookrightarrow X \times X \quad ; \text{diagonal embedding}$$

に対し, アーベル群

$$HA_{k,l}(X) := \mathrm{Ext}^{k}_{X\times X}(\mathcal{O}_\Delta, \omega_\Delta^{l})$$

と定め

$$HH(X) := \bigoplus_{k,l} HA_{k,l}(X)$$

とする.

$HH(X)$ に次のような積構造を与える:

$$\mathrm{Ext}^{k'}(\mathcal{O}_\Delta, \omega_\Delta^{m})$$

$$\varphi \in HA_{k,l}(X), \quad \psi \in HA_{k',m}(X)$$

に対し, ψ を

$$\mathrm{Ext}^{k'}_{X\times X}(\omega_\Delta^{l}, \omega_\Delta^{m+l}) \cong \mathrm{Ext}^{k'}_{X\times X}(\mathcal{O}_\Delta \otimes p_1^{*}\omega_X^{l}, \omega_\Delta^{m} \otimes p_1^{*}\omega_X^{l})$$

と思って, 導来圏の射として φ と合成させ

$$\psi \cdot \varphi := \psi \circ \varphi \in \mathrm{Ext}^{k+k'}_{X\times X}(\mathcal{O}_\Delta, \omega_\Delta^{l+m}) = HA_{k+k', l+m}(X)$$

と定義.

これにより $HH(X)$ $\left(= \bigoplus_{k,l} HA_{k,l}(X)\right)$ は
2重次数付き環となる.

Def 4.10

X : smooth projective variety

k 番目の Hochschild コホモロジーを次で定義.
$$HH^k(X) := HA_{k,0}(X) = \mathrm{Ext}^k_{X\times X}(\mathcal{O}_\Delta, \mathcal{O}_\Delta)$$

k 番目の Hochschild ホモロジーを次で定義.
$$HH_k(X) := HA_{k+\dim(X), 1}(X) = \mathrm{Ext}^{k+\dim(X)}_{X\times X}(\mathcal{O}_\Delta, \omega_\Delta).$$

各次数の Hochschild コホモロジーの直和
$$HH^*(X) := \bigoplus_k HH^k(X) = \bigoplus_k HA_{k,0}(X)$$
$$\left(= \bigoplus_k \mathrm{Ext}^k_{X\times X}(\mathcal{O}_\Delta, \mathcal{O}_\Delta)\right)$$

は. $HH(X) = \bigoplus_{k,l} HA_{k,l}(X)$ の次数付き部分環となる.
これを Hochschild コホモロジー環と呼ぶ.

また．各次数の Hochschild ホモロジーの直和

$$HH_*(X) := \bigoplus_k HH_k(X) = \bigoplus_k HA_{k+\dim(X),1}(X)$$

は．$HH^*(X)$ 上の次数付き左加群の構造が入る．

(両側？)

Thm 4.11

X, Y : smooth projective varieties

X, Y は互いに導来同値とする．$(D^b(X) \simeq D^b(Y))$

このとき．2重次数付き環の同型．

$$HH(X) \simeq HH(Y)$$

が得られる．

この同型を通して．その部分環である Hochschild コホモロジー環の同型

$$HH^*(X) \simeq HH^*(Y)$$

が得られ．さらに．次数付き加群の同型

$$HH_*(X) \simeq HH_*(Y)$$

が存在する．

Huybrechts : FMT in AG Ch 6.

2重次数付き環

$$HH(X) = \bigoplus_{k,l} HA_{k,l}(X)$$

の $k=0$, $l \geq 0$ を考えると、

$$R(X) := \bigoplus_{l\geq 0} HA_{0,l}(X) = \bigoplus_{l \geq 0} H^0(X, \omega_X^l)$$

が得られる。（canonical ring）

小平次元 $\kappa(X)$ を、

$$\begin{cases} R(X) = \mathbb{C} \Rightarrow \kappa(X) = -\infty \\ R(X) \neq 0 \Rightarrow \kappa(X) = \mathrm{tr.deg}_{\mathbb{C}}(R(X)) - 1 \end{cases}$$

で定める。

$h^0(X, \omega_X^l) = 0$ for $l > 0$.

Cor 4.12

X, Y : smooth projective varieties，導来同値.

このとき、

$R(X) \simeq R(Y)$，特に、$\kappa(X) = \kappa(Y)$

Lem 4.13

X : proj. var.

$\mathcal{L}$: X 上の ample line bundle.

$R := \bigoplus_{\ell \geq 0} H^0(X, \mathcal{L}^{\ell})$ とおくと. $X \simeq \mathrm{Proj}(R)$

K_X, K_Y が共に (anti-) ample なら.

(Lem 4.13). (Cor 4.12) より

$$X \cong \mathrm{Proj}(R(X)) \cong \mathrm{Proj}(R(Y)) \cong Y$$

Thm 4.14

X : smooth quasi-proj. var.

このとき. ベクトル空間の同型

$$\begin{cases} HH^n(X) \cong \bigoplus_{p+q=n} H^q(X, \wedge^p TX). \\ HH_n(X) \cong \bigoplus_{q-p=n} H^q(X, \Omega_X^p) \end{cases}$$

が存在.

$$H^n(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} H^q(X, \Omega_X^p)$$

Cor 4.16

X, Y ; 導来同値な smooth proj. var. とすると

$$\begin{cases} \bigoplus_{p+q=n} H^q(X, \Lambda^p TX) \cong \bigoplus_{p+q=n} H^q(Y, \Lambda^p TY) \\ \bigoplus_{q-p=n} H^q(X, \Omega_X^p) \cong \bigoplus_{q-p=n} H^q(Y, \Omega_Y^p). \end{cases}$$