

Ch. 4. 導来圏の半直交分解と例外生成列

§ 4.1. 代数多様体の導来圏の不変量.

X, Y ; smooth projective algebraic varieties / $\mathbb{C}$.

$D^b(X), D^b(Y)$; derived categories.

$$(D^b(X) = D^b(\text{Coh}(X)))$$

$$\Phi : D^b(X) \xrightarrow{\sim} D^b(Y) \quad ; \quad \begin{array}{l} \text{三角圏としての} \\ \text{圏同値} \end{array}$$

あるとき、 X と Y は 導来同値 , Fourier - Mukai
パートナー であるといふ。
 (Y は $X^\vee$)

(Thm 2.53 (Orlov)) より、図式

$$\begin{array}{ccc} & X \times Y & \\ \pi_X \swarrow & & \searrow \pi_Y \\ X & & Y \end{array}$$

同型を際して表す。

に對して、 $\exists P \in D^b(X \times Y)$ s.t.

$$\Phi \cong \Phi_{X \rightarrow Y}^P$$

$$\left(\Phi_{X \rightarrow Y}^P(-) := R\pi_{Y*} (P \otimes^L \pi_X^*(-)) \right)$$

Lem 4.1

$$\left[\begin{array}{l} X \subset Y \text{ なら 導来同値} \quad (\text{i.e., } D^b(X) \simeq D^b(Y)) \\ \Rightarrow \dim(X) = \dim(Y) \end{array} \right.$$

(*)

$$X \subset Y \text{ なら 導来同値 なのだから, } D^b(X) \xrightarrow{\Phi} D^b(Y)$$

$$\exists P \in D^b(X \times Y) \text{ s.t. } \Phi \simeq \Phi_P$$

$$(\Phi_P(-) := R\pi_{Y*}(P \overset{L}{\otimes} \pi_X^*(-)))$$

このとき, (3.1) より, Φ_P の 左随伴, 右随伴 関手は

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{Y \rightarrow X}^{P_L}, \quad P_L := P^V \overset{L}{\otimes} \pi_Y^* \omega_Y[\dim(Y)] \quad (\text{左}) \\ \Phi_{Y \rightarrow X}^{P_R}, \quad P_R := P^V \overset{L}{\otimes} \pi_X^* \omega_X[\dim(X)] \quad (\text{右}) \end{array} \right.$$

と表せる. Φ は 圏同値 なのだから.

$$\Phi^{-1} \simeq \Phi_{Y \rightarrow X}^{P_L} \simeq \Phi_{Y \rightarrow X}^{P_R}$$

積分核の - 乗性 から,

$$P^V \overset{L}{\otimes} \pi_Y^* \omega_Y[\dim(Y)] \simeq P^V \overset{L}{\otimes} \pi_X^* \omega_X[\dim(X)]$$

$$\therefore P^V \otimes \pi_X^* \omega_X \simeq P^V \overset{L}{\otimes} \pi_Y^* \omega_Y [\dim(Y) - \dim(X)]$$

P^V は bounded derived cat. の object なのだから.

$$\dim(X) = \dim(Y)$$

以下. 他の不変量を採る

Def

A : Abel 圏 (より一般に完全圏) とする.

A に対し. その Grothendieck 群 $K(A)$ を次のように定義:

・ A のすべての対象の同型類 $[E]$ で
自由に生成される Abel 群 $(\bigoplus_{E \in A} \mathbb{Z}[E])$ を
その部分群.

$$\langle [F] - [E] - [G] \mid \exists 0 \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 0 : \text{exact} \rangle$$

で割ったものを $K(A)$ とする.

$$\text{例 4.2} \quad \bigoplus_{V \in \text{Vect}(\mathbb{C})} \mathbb{Z}[V] / \sim \quad (V \simeq \mathbb{C}^{\dim V})$$

$$\varphi: K(\text{Vect}(\mathbb{C})) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$\pm [V] \qquad \longmapsto \qquad \pm \dim(V)$$

φ は 全単射.

$$0 \rightarrow V^0 \rightarrow V^1 \rightarrow V^2 \rightarrow 0 \quad \text{ex. } \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}$$

$$[V^1] = [V^0] + [V^2]$$

$$\dim V^1 = \dim V^0 + \dim V^2$$

$$\begin{aligned} \therefore \varphi([V^0] + [V^2]) &= \varphi([V^1]) \\ &= \dim V^1 \\ &= \dim V^0 + \dim V^2 \\ &= \varphi([V^0]) + \varphi([V^2]). \end{aligned}$$

Def

$\mathcal{D}$: 三角圏 とする.

$\mathcal{D}$ の Grothendieck 群 $K(\mathcal{D})$ を 次のように定義 :

• $\mathcal{D}$ の対象の同型類 $[E]$ で自由に生成される Abel 群 $\mathcal{E}$. その部分群

$$\langle [F] - [E] - [G] \mid \exists E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow E[1] \rangle$$

exact, tri.

で割り、たものが $K(\mathcal{D})$.

$$\bigoplus_{E \in \mathcal{D}} \mathbb{Z}[E] / \sim$$

問 4.3 (154)

三、角、圓

↓

A : Abel 群, $D^b(A)$: A の導来圏.

(i) $E^\bullet \in D^b(A)$ に対し, $K(D^b(A))$ の中へ.

$$[E^\bullet] = \sum (-1)^i [\mathcal{H}^i(E^\bullet)] = \sum_i (-1)^i [E^i]$$

$$(ii) \quad K(A) \xrightarrow{\sim} K(D^b(A)).$$

③

(i) $\kappa(A)$ の中で γ を示す :

$$\sum_i (-1)^i [E^i] = \sum_i (-1)^i [\mathcal{H}^i(E)]$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \text{Im}(d^i) & \xrightarrow{\circ} & \\ & & & \nearrow & \cap & & \\ \dots & \rightarrow & E^{i-1} & \xrightarrow{d^{i-1}} & E^i & \xrightarrow{d^i} & E^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \dots \\ & & & \nearrow \cup & & & \\ & & & \text{Ker}(d^i) & & & \\ & & \searrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

$$0 \rightarrow \ker(d^i) \rightarrow E^i \rightarrow \operatorname{Im}(d^i) \rightarrow 0.$$

$$0 \rightarrow \operatorname{Im}(d^{i-1}) \rightarrow \ker(d^i) \rightarrow \mathcal{H}^i(E) \rightarrow 0.$$

b^{14} exact to 2^4 .

$$[\mathcal{H}^i(E^\bullet)] = [\ker(d^i)] - [\operatorname{Im}(d^{i-1})]$$

$$[E^i] = [\ker(d^i)] + [\operatorname{Im}(d^i)]$$

$$\therefore \sum_i (-1)^i [E^i] = \sum_i (-1)^i ([\ker(d^i)] + [\operatorname{Im}(d^i)])$$

$$= \dots - [\operatorname{Im}(d^{-1})]$$

is it ≥ 0 ?

$$+ [\ker(d^0)] + [\operatorname{Im}(d^0)]$$

$$- [\ker(d^1)] - [\operatorname{Im}(d^1)]$$

$$+ \dots$$

$$= \sum_i (-1)^i ([\ker(d^i)] - [\operatorname{Im}(d^{i-1})])$$

$$= \sum_i (-1)^i [\mathcal{H}^i(E^\bullet)]$$

$$(ii) \quad \mathcal{E}^\bullet \simeq \mathcal{F}^\bullet \quad \text{in } D^b(A) \text{ iff}$$

$$\left(\begin{array}{l} \forall i, \quad \mathcal{H}^i(\mathcal{E}^\bullet) = \mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet) \\ i, (i) \neq \emptyset. \\ [\mathcal{E}^\bullet] = [\mathcal{F}^\bullet] \quad \text{in } K(D^b(A)). \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \iota: K(D^b(A)) &\longrightarrow K(A) \\ \downarrow \omega &\quad \downarrow \omega \\ [\mathcal{E}^\bullet] &\longmapsto \sum_i (-1)^i [\mathcal{E}^i] \\ &= \sum_i (-1)^i [\mathcal{H}^i(\mathcal{E}^\bullet)] \end{aligned}$$

とある.

$D^b(A)$ は dist. tri.

$$\mathcal{E}^\bullet \rightarrow \mathcal{F}^\bullet \rightarrow \mathcal{G}^\bullet \rightarrow \mathcal{E}^\bullet[1]$$

が短列.

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \mathcal{H}^i(\mathcal{E}^\bullet) \rightarrow \mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet) \rightarrow \mathcal{H}^i(\mathcal{G}^\bullet) \\ \rightarrow \mathcal{H}^{i+1}(\mathcal{E}^\bullet) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

は A 上の long ex. sq.

$$\begin{aligned} \therefore \iota([\mathcal{F}^\bullet]) &= \sum_i (-1)^i [\mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet)] \\ &= \sum_i (-1)^i ([\mathcal{H}^i(\mathcal{E}^\bullet)]) + \sum_i (-1)^i ([\mathcal{H}^i(\mathcal{G}^\bullet)]) \\ &= \iota([\mathcal{E}^\bullet]) + \iota([\mathcal{G}^\bullet]) \end{aligned}$$

$$\therefore \iota([\mathcal{E}^\bullet] + [\mathcal{G}^\bullet]) = \iota([\mathcal{E}^\bullet]) + \iota([\mathcal{G}^\bullet])$$

よって ι は group hom.

$$\iota^{-1}: K(A) \longrightarrow K(D^b(A)); [\mathcal{E}] \mapsto [\mathcal{E}^\bullet]$$

以下, $K(A)$ と $K(D^b(A))$ は同一視する.

X : Smooth Projective algebraic variety

$$D := D^b(X) \quad (= D^b(\text{Coh}(X))) \quad \text{etc.}$$

X の 局所自由層 となる 完全圏 の Grothendieck 群 を $K(X)$ とおく.

Lem

X 上の 任意の 連接層 E は, 局所自由層 に対する 有限の 長さを持つ 複体 と 擬同型 となる.

⑤ Huy. Prop 3.26, Hartshorne Ch.3 ex. 6.9. など.

$$n = \dim(X) \quad \text{etc.}$$

$$0 \rightarrow \mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{E}_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_0 \rightarrow E \rightarrow 0$$

$\mathcal{E}_i$: locally free sheaf.

命 4.3 は 因 $n \neq 1$?

$$K(X) \simeq K(D^b(X)).$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{局所自由層} \\ \mathcal{E}^i \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{連接層} \\ E^i \end{array} \right)$$

$E, F \in D^b(X)$ に対し. その $K(X)$ での積を.

$$[E] \cdot [F] := [E \otimes F]$$

と定めることができる. $K(X)$ は $[\mathcal{O}_X]$ を単位元とした
環構造を持つ. (Grothendieck 環)

Rem

locally free にしない. $\otimes$ が上手く定まらない.
(Huybrechts p.98 など)

Coniveau フィルトレーション

$$Gh^{\geq i}(X) := \{ F \in Gh(X) \mid \text{codim}_x(\text{Supp}(F)) \geq i \}$$

とおく. 各 i に対して, $Gh(X)$ の 部分 Abel 圏.

そこで, 自然な写像

$$K(Gh^{\geq i}(X)) \longrightarrow K(Gh(X))$$

の像を

$$F^i(K(X)) := \text{Im}(K(Gh^{\geq i}(X)) \rightarrow K(Gh(X)))$$

と定める. これは $K(X)$ の filtration を定める.

$$F^i(K(X)) \cdot F^j(K(X)) \subset F^{i+j}(K(X))$$

と成る.

$$\mathrm{Gr}^i(K(X)) := F^i(K(X)) / F^{i+1}(K(X))$$

と成る.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{rank} & : & \mathrm{Gr}^0(K(X)) \longrightarrow A^0(X) \cong \mathbb{Z}. \\ \mathrm{det} & : & \mathrm{Gr}^1(K(X)) \longrightarrow A^1(X) = \mathrm{Pic}(X). \\ c_2 & : & \mathrm{Gr}^2(K(X)) \longrightarrow A^2(X) \end{array} \right.$$

は同型 (Fulton Ex 15.3.6).

三角圏の同値 $\Phi : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$ が与えられているとき.

Φ は dist. tri. を dist. tri. に移す.

$\therefore$ それらの Grothendieck 群 $K(\mathcal{D}_1), K(\mathcal{D}_2)$ は同型.

特に, X と Y が Fourier 同値 $\mathcal{H}$ -パートナー ならば.

それらの Grothendieck 群 $K(X), K(Y)$ は同型.

Thm 4.5 (Grothendieck - Riemann - Roch の定理)

Smooth quasi-projective varieties の間の射影射

$$f: X \rightarrow Y$$

に対し.

次の図式が可換となる:

$$= \sum (-1)^i \left(\sum (-1)^j [R^j f_* \mathcal{H}^i(\mathcal{F})] \right)$$

$$\begin{array}{ccc} D^b(X) & \xrightarrow{Rf_*} & D^b(Y) \\ \text{ch}(-) \text{td}_X \downarrow & \begin{array}{c} \text{K(X)} \xrightarrow{f_*} \text{K(Y)} \\ \text{blue arrows} \end{array} & \downarrow \text{ch}(-) \text{td}_Y \\ A(X)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{f_*} & A(Y)_{\mathbb{Q}} \end{array}$$

$Y = \text{Spec}(\mathbb{C})$ として次を得る.

Cor 4.6 (Hirzebruch - Riemann - Roch の定理).

X : Smooth projective variety と

$E \in D^b(X)$ に対し.

$$\chi(E) = \int_X \text{ch}(E) \text{td}_X$$

が成立.

$E, F \in D^b(X)$ に対して. Euler 形式 (Euler form) χ .

$$\chi(E, F) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}^i(E, F)$$

$$\left(\begin{aligned} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ext}^i(E, F) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} H^i(X, E^\vee \otimes F). \end{aligned} \right)$$

と定める. これは,

$$\chi(-, -) : K(X) \times K(X) \longrightarrow \mathbb{Z} \quad \left(\begin{smallmatrix} \text{bilinear} \\ \text{form} \end{smallmatrix} \right)$$

$$\chi(E, F) = \int_X \operatorname{ch}(E^\vee \otimes F) \operatorname{td}_X$$

と計算できる (Hirzebruch - Riemann - Roch)

$$\exists \Phi : D^b(X) \xrightarrow{\sim} D^b(Y)$$

$$\text{if } \chi(E, F) = \chi(\Phi(E), \Phi(F)) \quad \text{if } \alpha \in \mathbb{Z}.$$

$K(X), K(Y)$ の同型 (Euler 形式を保つ)

$$K(X) \times K(X) \xrightarrow{\chi(-, -)} \mathbb{Z}$$

$$\downarrow$$

$$\hookrightarrow$$

$$\parallel$$

$$K(Y) \times K(Y) \xrightarrow{\chi(-, -)} \mathbb{Z}$$

問 4.7

X : smooth projective variety, $\dim X = n$.

X の コホモロジ-環 の元

$$v = (1, a_1, a_2, \dots, a_n) \in H^{2*}(X, \mathbb{Q})$$

$$(a_i \in H^{2i}(X, \mathbb{Q}))$$

に 対し. $u = (1, b_1, b_2, \dots, b_n) \in H^{2*}(X, \mathbb{Q})$

で あ, り.

$$(u, u) = v$$

$$((-,-) \text{ は カッパ-種})$$

を 満たす ものが 一意的に 存在.

この u を $\sqrt{v}$ と かく.

$\alpha \in K(X)$ に 対し. Mukai 環

$$v(\alpha) \in H^{2*}(X, \mathbb{Q})$$

を.

$$v(\alpha) := \text{ch}(\alpha) \sqrt{\text{td}_X}$$

で 定義.

$$E \in D^b(X) \text{ に 対しては } v(E) := v([E]) \text{ と する.}$$

Prop 4.8

X, Y : smooth proj. var.

$P \in D^b(X \times Y)$ を核とした Fourier-変換

$$\Phi_{X \rightarrow Y}^P : D^b(X) \xrightarrow{\sim} D^b(Y)$$

が"与えられている"とある。このとき図式、

$$\begin{array}{ccc} D^b(X) & \xrightarrow[\sim]{\Phi_{X \rightarrow Y}^P} & D^b(Y) \\ [-] \downarrow & & \downarrow [-] \\ K(D^b(X)) \cong K(X) & \xrightarrow{\Phi_{[P]}^K} & K(Y) \cong K(D^b(Y)) \\ \nu(-) \downarrow & & \downarrow \nu(-) \\ H^*(X, \mathbb{Q}) & \xrightarrow[\phi_{X \rightarrow Y}^P]{} & H^*(Y, \mathbb{Q}) \end{array}$$

は可換な図式。 $\phi_{X \rightarrow Y}^P$ は $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間の間の同型と与えられる。

ここで $\phi_{X \rightarrow Y}^P$ は、

$$\begin{array}{ccc} H^*(X, \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H^*(Y, \mathbb{Q}) \\ \cup & & \cup \\ \beta & \longmapsto & \pi_{Y*}(\nu(P) \cdot \pi_X^*(\beta)) \end{array}$$

と与えられる。

$$\Phi_{[P]}^k \text{ により,}$$

$$[P] \in K(X \times Y) \text{ により,}$$

$$\begin{array}{ccc} \Phi_{[P]}^k : & K(X) & \longrightarrow K(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ & [P] & \longmapsto \pi_{Y!}([P] \otimes \pi_X^*([P])) \end{array}$$

$$\text{と定める. } (f_! [P] := \sum (-1)^i [R^i f_! ([P])]).$$

[証明]

$$\begin{array}{ccc} K(X) & \longrightarrow & K(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*(X, \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H^*(Y, \mathbb{Q}) \end{array} \quad \text{の可換性を考える.}$$

$$\begin{array}{ccccc} K(X) & \xrightarrow{\nu} & H^*(X, \mathbb{Q}) & & \\ \pi_X^* \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \pi_X^* & \\ K(X \times Y) & \xrightarrow[\nu \sqrt{\text{td}(Y)}]{\sim} & H^*(X \times Y, \mathbb{Q}) & & \text{) Proj. formula} \\ \downarrow \cdot P & \circlearrowleft & \downarrow \cdot \nu(P) & & \text{で可換} \\ K(X \times Y) & \xrightarrow[\nu \sqrt{\text{td}(X)}]{\sim} & H^*(X \times Y, \mathbb{Q}) & & \\ \pi_{Y!} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \pi_{Y!} & \\ K(Y) & \xrightarrow[\nu]{\sim_{G.R.}} & H^*(Y, \mathbb{Q}) & & \in G.R.P. \\ & & & & \text{で可換.} \end{array}$$

の可換性

n 次元空間 X 上の同型 $H^*(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^*(Y, \mathbb{Q})$ により.
 (Huybrechts Prop 5.33 を参照)

Lem (Huybrechts Lem 5.32)

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{X \rightarrow Y}^P : D^b(X) \rightarrow D^b(Y) \\ \Phi_{Y \rightarrow Z}^Q : D^b(Y) \rightarrow D^b(Z) \end{array} \right.$$

Φ Fourier 変換.

$$\Phi_{X \rightarrow Z}^R := \Phi_{Y \rightarrow Z}^Q \circ \Phi_{X \rightarrow Y}^P : D^b(X) \rightarrow D^b(Z)$$

とある. このとき, $\mathcal{O}_X$ の同型に誘導される射により.

$${}^H\Phi_{X \rightarrow Z}^R = {}^H\Phi_{Y \rightarrow Z}^Q \circ {}^H\Phi_{X \rightarrow Y}^P : H^*(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(Z, \mathbb{Q})$$

Prop (Huybrechts Prop 5.33)

$P \in D^b(X \times Y)$ 双圏同値

$$\Phi_{X \rightarrow Y}^P : D^b(X) \rightarrow D^b(Y)$$

これは $\mathbb{C}$ 上の $\mathbb{Q}$ -Fourier 変換

$$H^1 \Phi_{X \rightarrow Y}^P : H^*(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^*(Y, \mathbb{Q})$$

は、 $\mathbb{Q}$ -ベクトル空間の間の全単射写像である。

(2)

$\Phi_{X \rightarrow Y}^P$ 双圏同値の逆写像。quasi-inverse は。

$$(\Phi_{X \rightarrow Y}^P)^{-1} \simeq \Phi_{Y \rightarrow X}^{P_L} = \Phi_{Y \rightarrow X}^{P_R}$$

τ_X^u, τ_Y^u

$$\begin{cases} \Phi_{Y \rightarrow X}^{P_R} \circ \Phi_{X \rightarrow Y}^P \simeq \Phi_{X \rightarrow X}^{\mathcal{O}_X} \simeq \text{id} \\ \Phi_{X \rightarrow Y}^P \circ \Phi_{Y \rightarrow X}^{P_L} \simeq \Phi_{Y \rightarrow Y}^{\mathcal{O}_Y} \simeq \text{id} \end{cases}$$

$\Delta_X \subset X \times X$

$$X \rightarrow \Delta_X \hookrightarrow X \times X$$

$$Y \rightarrow \Delta_Y \hookrightarrow Y \times Y$$

は diagonal embedding.

(Y → Y)

Fourier 変換核の一様性から、 $\mathcal{O}_\Delta \in D^b(X \times X)$ は、
 id と同値に付き Fourier 変換 $\mathbb{E}$ 等 (同型を除いて) 唯一つの対象であった。

(Lem) 4).

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^H\Phi_{Y \rightarrow X}^{P_R} \circ {}^H\Phi_{X \rightarrow Y}^P = {}^H\Phi_{X \times X}^{\mathcal{O}_\Delta} \\ {}^H\Phi_{X \rightarrow Y}^P \circ {}^H\Phi_{Y \rightarrow X}^{P_R} = {}^H\Phi_{Y \times Y}^{\mathcal{O}_\Delta} \end{array} \right.$$

すなわち、 ${}^H\Phi_{X \rightarrow X}^{\mathcal{O}_\Delta} = \text{id}$ を示せば OK.

$$L: X \xrightarrow{\sim} \Delta \hookrightarrow X \times X$$

に於いて、Grothendieck - Riemann - Roch を用いて、

$$\begin{aligned} \text{ch}(\mathcal{O}_\Delta) \cdot \text{td}(X \times X) &= L_* (\text{ch}(\mathcal{O}_X) \cdot \text{td}(X)) \\ &= L_* \text{td}(X). \end{aligned}$$

両辺を $\sqrt{\text{td}(X \times X)}$ で割る。すなわち、 $L^* \sqrt{\text{td}(X \times X)} = \text{td}(X)$ を用いて、

$$\text{ch}(\mathcal{O}_\Delta) \cdot \sqrt{\text{td}(X \times X)} = L_*(1)$$

$$\begin{aligned} \therefore p_* (q^*(\beta) \cdot \text{ch}(\mathcal{O}_\Delta) \cdot \sqrt{\text{td}(X \times X)}) &= p_* (q^*(\beta) \cdot L_*(1)) \\ &= p_* (L_* (L^* q^*(\beta))) = \beta \end{aligned}$$

あまり分かってない.

Rem

$\phi_{X \rightarrow Y}^P$ は $\mathcal{O}_{X \times Y}$ の次数を保たない.
 cf. Thm 2.54 2^o. $\bigoplus_{A \rightarrow A}^P (\mathcal{O}_A)$ は A 上の
 line bundle. だから, $\phi_{A \rightarrow A}^P$ は
 $\mathcal{O}_{X \times Y}$ の次数を保たない.

Cor 4.9

X と Y 上の導来同値なとき,
 $e(X) = e(Y)$

(1)

(Prop 4.8) 2^o. $\nu(P) \in H^{2*}(X \times Y, \mathbb{Q})$ に対し,
 $\phi_{X \rightarrow Y}^P$ は $H^*(X, \mathbb{Q})$, $H^*(Y, \mathbb{Q})$ の
 奇数次部分, 偶数次部分を保つ.

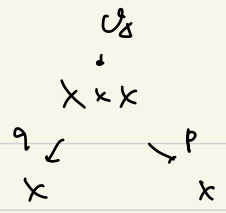
$$\text{i.e.} \quad \begin{cases} \phi(H^{\text{even}}(X)) \subset H^{\text{even}}(Y) \\ \phi(H^{\text{odd}}(X)) \subset H^{\text{odd}}(Y) \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{l} \textcircled{2} \\ \alpha := \nu(P) = \text{ch}(P) \sqrt{\text{td}(X \times Y)} \\ \phi_{X \rightarrow Y}^P : H^*(X, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(Y, \mathbb{Q}) \\ \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ \beta \longmapsto \pi_{Y*}(\nu(P) \cdot \pi_X^*(\beta)) \\ \quad \quad \quad \underbrace{\quad}_{H^{2*}(X \times Y, \mathbb{Q})} \end{array} \right)$$

$$e(X) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \dim H^i(X, \mathbb{Q}) \text{ だから } e(Y) = e(X).$$

[FM 愛標の例] cf. Huybrechts example 5.4

① $\text{id} : D^b(X) \rightarrow D^b(X)$

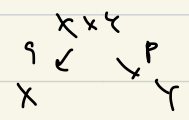


$$\Phi_{X \rightarrow X}^{U_X}(\mathcal{F}) = \mathbb{R}P_+ (U_X \overset{L}{\otimes} q^*(\mathcal{F}))$$

$$\left(\iota : X \xrightarrow{\sim} \Delta \subseteq X \times X \right)$$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{R}P_+ (\iota_* U_X \overset{L}{\otimes} q^*(\mathcal{F})) \\ &= \mathbb{R}P_+ \left(\underbrace{\iota_*}_{\text{id}} (U_X \overset{L}{\otimes} \underbrace{\iota^* q^*(\mathcal{F})}_{\text{id}}) \right) \\ &= \mathcal{F} \end{aligned}$$

② $f : X \rightarrow Y$



$$\mathbb{R}f_* = \Phi_{X \rightarrow Y}^{U_Y} : D^b(X) \rightarrow D^b(Y)$$

$$\Phi_{X \rightarrow Y}^{U_Y}(\mathcal{F}) = \mathbb{R}P_+ (U_Y \overset{L}{\otimes} q^*\mathcal{F})$$

$$\Gamma_f \subset X \times Y \quad \text{etc. ...}$$

$$\left(\begin{aligned} &\mathbb{L}f^* : D^-(Y) \rightarrow D^-(X) \\ &Y : \text{smooth variety} \end{aligned} \right)$$

$E : D^b(X)$ is spherical object.

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \pi_1 \swarrow & \times & \searrow \pi_2 \\ X & & X \end{array}$$

$$ev : \pi_1^* E \otimes^L \pi_2^* E^\vee \rightarrow \mathcal{O}_\Delta$$

$$P_E := \text{Cone}(ev)$$

$$\mathcal{Q}_{X \rightarrow X}^{P_E} : D^b(X) \rightarrow D^b(X)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R\text{Hom}(E, E) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}[-\dim(X)] \\ E \otimes \omega_X \cong E \end{array} \right.$$

(Def 2.55)