

## § 5.6 普遍層 に対する 導来同値

$X$  : Connected smooth projective variety

$M := M_\omega(v)$  : Gieseker 安定層のモジュライ空間.

とある.  $X \times M$  上に 普遍層

$$\mathcal{E} \in \text{Coh}(X \times M)$$

が存在. とある.

若  $\gamma = [E] \in M$  に対して.

$$\mathcal{E}_\gamma = \mathcal{E}|_{X \times \{\gamma\}} \simeq E. \quad \text{とある.}$$

(  $\mathcal{E}$  は 全  $\gamma$  に対応する  $X$  上の連接層 である )

### Thm 5.33

先程の状況で、次の2条件を仮定す:

- (i)  $M$  は  $\dim M = \dim X$   
かつ smooth projective variety
- (ii)  $\forall \sigma_1, \sigma_2 \in M$  s.t.  $\sigma_1 \neq \sigma_2$   
 ,  $\text{IR Hom}(\mathcal{E}_{\sigma_1}, \mathcal{E}_{\sigma_2}) = 0$ .

このとき、Fourier - Mukai 変換

$$\Phi_{M \rightarrow X}^{\mathcal{E}}: D^b(M) \rightarrow D^b(X)$$

は fully - faithful. 且つ

$$\forall \sigma \in M, \quad \mathcal{E}_{\sigma} \otimes \omega_X \cong \mathcal{E}_{\sigma}$$

ならば、 $\Phi_{M \rightarrow X}^{\mathcal{E}}$  は 三角圏 としての 圏同値 を 与える。

Rem

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \varepsilon & & \\
 & & \downarrow & & \\
 & & M \times X & & \\
 \mathcal{F} & \searrow \pi_M & & \searrow \pi_X & \Phi(\mathcal{F}) \\
 & M & & X & 
 \end{array}$$

$$\Phi_{M \rightarrow X}^{\varepsilon}(\mathcal{F}) = R\pi_{X*}(\varepsilon^{\vee} \otimes \pi_M^* \mathcal{F})$$

でよい).  $\Phi := \Phi_{M \rightarrow X}^{\varepsilon}$  は. 右随伴. 左随伴 を持つ.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi^L := \Phi_{X \rightarrow M}^{\varepsilon^L}, \quad \varepsilon^L = \varepsilon^{\vee} \otimes \pi_X^* \omega_X [\dim X]. \\ \Phi^R := \Phi_{X \rightarrow M}^{\varepsilon^R}, \quad \varepsilon^R = \varepsilon^{\vee} \otimes \pi_M^* \omega_M [\dim M]. \end{array} \right.$$

これは. 自然変換

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta : \Phi^L \circ \Phi \rightarrow \text{id} \\ \epsilon : \text{id} \rightarrow \Phi^R \circ \Phi \end{array} \right.$$

$\omega^u$  存在.

Lem 5.34

$X$  is smooth projective variety of  $\dim X = d$ .  
 $E \in D^b(X)$ .

$$\mathrm{Hom}_x^i(E, \mathcal{O}_x) = 0 \quad \forall x,$$

任意  $x_0$  の  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $x \neq x_0$ .  $\mathcal{O}_x$  成立.

さらに,  $i \notin [0, d]$ ,  $x = x_0$   $\mathcal{O}_x$  成立する.

$E$  は  $\mathrm{Supp}(E) = \{x_0\}$  なる連接層.

②

$$\begin{aligned} E_2^{p,q} &= \mathrm{Hom}^p(\mathcal{H}^{-q}(E|_{X \setminus \{x_0\}}), \mathcal{O}_x) \\ &\Rightarrow \mathrm{Hom}^{p+q}(E|_{X \setminus \{x_0\}}, \mathcal{O}_x) \end{aligned}$$

より,  $x \neq x_0$  ならば  $\forall q \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathcal{H}^{-q}(E|_{X \setminus \{x_0\}}) = 0$ .

$$\therefore E|_{X \setminus \{x_0\}} = 0.$$

よって, 上記の  $\mathcal{O}_x$ -層  $\mathcal{H}^i(E)$  は

$$\mathrm{Supp} \mathcal{H}^i(E) = \{x_0\}$$

である.

$$E_z^{0,q} = \text{Hom}(\mathcal{H}^{-q}(E), \mathcal{O}_{x_0}) \Rightarrow \text{Hom}^q(E, \mathcal{O}_{x_0})$$

$$\text{f)}). \quad \mathcal{H}^{-q}(E) \neq 0 \Rightarrow E_z^{0,q} \neq 0.$$

また, Serre duality に f)。

$$\begin{aligned} & \text{Hom}^d(\mathcal{H}^{-q}(E), \mathcal{O}_{x_0}) \\ & \cong \text{Hom}(\mathcal{H}^{-q}(E), \mathcal{O}_{x_0} \otimes \omega_x [\dim X]) \\ & \cong \text{Hom}(\mathcal{O}_{x_0}, \mathcal{H}^{-q}(E))^\vee \neq 0. \end{aligned}$$

$$\text{f)} \text{ の } \text{c)}). \quad E_z^{d,q} \neq 0.$$

$$z \in \mathbb{Z}^+. \quad \begin{cases} q_1 := \min \{ q \in \mathbb{Z} \mid \mathcal{H}^{-q}(E) \neq 0 \} \\ q_2 := \max \{ q \in \mathbb{Z} \mid \mathcal{H}^{-q}(E) \neq 0 \} \end{cases}$$

と定める。

スピングル系列  $E_z^{0,q_1}, E_z^{d,q_2}$  項  $\mathbb{Z}^+$  遷化するため

$$\begin{cases} q_1 \geq 0. \\ d \geq q_2 + d. \end{cases}$$

$$q_1 \leq q_2 \quad \text{f)} \text{ の } \text{c)}). \quad 0 \leq q_1 \leq q_2 \leq 0 \quad \therefore q_1 = q_2 = 0.$$

$\therefore E$  は,  $\{x_0\}$  に Support を持つ 0 次元の連接層。

(Proof of Thm 5.33)

Step 1

$\forall \gamma \in M,$

$$\eta(\mathcal{O}_\gamma) : \Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_\gamma) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_\gamma$$

(i)

$$\begin{aligned} \Phi(\mathcal{O}_\gamma) &= R\pi_{X*}(\mathcal{E} \otimes \pi_M^* \mathcal{O}_\gamma) \\ &= \mathcal{E}_\gamma \end{aligned}$$

すなわち、任意の  $\gamma \in M$  に対して、

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_M^i(\Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_\gamma), \mathcal{O}_\gamma) &\cong \mathrm{Hom}_X^i(\Phi(\mathcal{O}_\gamma), \Phi(\mathcal{O}_\gamma)) \\ &= \mathrm{Hom}_X^i(\mathcal{E}_\gamma, \mathcal{E}_\gamma) \end{aligned}$$

仮定

$$\forall \gamma_1, \gamma_2 \in M, \gamma_1 \neq \gamma_2 \Rightarrow R\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_{\gamma_1}, \mathcal{E}_{\gamma_2}) = 0$$

すなわち、" $\gamma_1 \neq \gamma_2$ " or " $\gamma_1 = \gamma_2$  かつ  $i \notin [0, \dim M]$ " ならば、

$$\mathrm{Hom}_X^i(\mathcal{E}_{\gamma_1}, \mathcal{E}_{\gamma_2}) = 0.$$

すなわち、(Lem 5.34) により、 $\mathrm{Supp}(\Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_\gamma)) = \{\gamma\}$   
 $\uparrow$   
 $\mathrm{Coh}(M).$

よて、射  $\gamma(\mathcal{O}_x) : \Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_x) \rightarrow \mathcal{O}_x$  は全射.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & G & \rightarrow & \Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_x) & \xrightarrow{\gamma(\mathcal{O}_x)} & \mathcal{O}_x \rightarrow 0. & (ex) \\ & & \parallel & & & & & \\ & & \ker(\gamma(\mathcal{O}_x)) & & & & & \end{array}$$

(例 3.4(i))

主張を得るために、 $G=0$  を示す.

$\Omega = \{ \mathcal{O}_x \mid x \text{ は } M \text{ の 閉点} \}$  は  $D^b(M)$  の閉点

よて、 $\text{Hom}(G, \mathcal{O}_x) = 0$  を得る.

$$\left( \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \Omega \text{ は } D \text{ の } \text{SIS} \text{ 型 であるとは} \\ \langle \Omega \rangle^+ = {}^+ \langle \Omega \rangle = 0 \text{ であること.} \end{array} \right)$$

① に  $\text{Hom}(-, \mathcal{O}_x)$  を施して.

$$\text{Ext}_M^i(\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_x) \rightarrow \text{Ext}_M^i(\Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_x), \mathcal{O}_x)$$

が単射であることを示す.

$$\begin{cases} \text{Ext}_M^1(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_Z) \simeq T_Z M \\ \text{Ext}_M^1(\Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_Z), \mathcal{O}_Z) \simeq \text{Ext}_M^1(\mathcal{E}_Z, \mathcal{E}_Z) \end{cases}$$

$$(\text{Ext}_M^1(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_Z) \simeq) T_Z M \longrightarrow \text{Ext}_M^1(\mathcal{E}_Z, \mathcal{E}_Z)$$

が単射であることがわかる。

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow \mathcal{O}_{Z \times X} \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow 0.$$

$H^1(X, \mathcal{O}_Z)$   
が非自明である

~~~~~  
→

$$0 \rightarrow \mathcal{E}_Z \rightarrow \mathcal{E}|_{Z \times X} \rightarrow \mathcal{E}_Z \rightarrow 0.$$

この対応は単射。(Kodaira-Spencer 写像).  
(lem 5.25 を参照)

$$\text{よって, } G = \ker(\eta(\mathcal{O}_Z)) = 0$$

$$\text{よって } \eta(\mathcal{O}_Z) : \Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_Z) \rightarrow \mathcal{O}_Z$$

は同型。

Step 2

函手  $\Phi$  は充満忠実.

⑦

Lem 3.5 (ii) (下への)  $\neq$ .

$$\forall F \in \mathcal{D}^b(X),$$

$$\epsilon(F) : F \xrightarrow{\sim} \Phi^R \circ \Phi(F)$$

を要す.

Rem - Lem 3.5 (ii)

函手  $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  が右随伴  $\Phi^R$  を持つとき.

「 $\Phi$  が充満忠実である」 こと.

「 $\epsilon : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow \Phi^R \circ \Phi$  が同型である」 ことは同値

( $\Phi^L$  も同様)

exact tri.

$$G' \rightarrow F \rightarrow \Phi^R \circ \Phi(F)$$

を要す.  $\text{RHom}(\mathcal{O}_S, -)$  を施す.

exact. tri.

$$\mathrm{RHom}(\mathcal{O}_3, G') \rightarrow \mathrm{RHom}(\mathcal{O}_3, F) \xrightarrow{E(F)_0} \mathrm{RHom}(\mathcal{O}_3, \Phi^R \circ \Phi(F))$$

[§.20]

で得る.

$\Phi^L$  と  $\Phi^R$  の随伴性より.

$$\begin{aligned} & \mathrm{RHom}(\mathcal{O}_3, \Phi^R \circ \Phi(F)) \\ & \cong \mathrm{RHom}(\Phi(\mathcal{O}_3), \Phi(F)) \\ & \cong \mathrm{RHom}(\Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_3), F) \\ & \stackrel{\text{Step 1}}{\cong} \mathrm{RHom}(\mathcal{O}_3, F) \end{aligned}$$

Step 1

$\Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_3) \cong \mathcal{O}_3$

よって, (§.20) の  $E(F)_0$  は 同型  $\mathbb{Z}$  の元.

$$\forall \gamma \in M, \quad \mathrm{RHom}(\mathcal{O}_\gamma, G') = 0.$$

$\Omega = \{ \mathcal{O}_\gamma \mid \gamma \notin M \text{ の閉点} \}$  は spanning class

∴  $G' = 0$ .  $\mathbb{Z}$  の元  $E(F)$  は 同型.

∴  $\Phi$  は 充満忠実  
(fully-faithful)

Step 3

さらに,

$$\mathcal{E}_\gamma \otimes \omega_x \cong \mathcal{E}_\gamma$$

が、ある  $\gamma \in M$  として成り立つならば  $\Phi$  は 圏同値.

(-i)

(Thm 3.18) を用いた.

Thm 3.18

$\mathcal{C}$  : 非自明な 三角圏

$\mathcal{D}$  : 直既約な 三角圏

$\Omega$  :  $\mathcal{C}$  の スパニング 類

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \Phi \circ \mathcal{N}_{\mathcal{C}}(\omega) \cong \mathcal{N}_{\mathcal{D}} \circ \Phi(\omega)$$

が成り立つとき、 $\Phi$  は 三角圏の同値を与えた.

$$\Phi(\mathcal{N}_{D^*(M)}(\mathcal{O}_Y)) \cong \Phi(\mathcal{O}_Y \otimes \omega_M [\dim M])$$

$$\mathcal{O}_Y \otimes \omega_M \cong \mathcal{O}_Y$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{stalk } \in \mathbb{Z}. \\ k(v) \otimes \omega_{M,v} / m_v \cdot \omega_{M,v} \cong k(v) \end{array} \right)$$

$$\cong \Phi(\mathcal{O}_Y [\dim M])$$

$$\cong \mathcal{E}_Y [\dim M]$$

$$\cong \mathcal{E}_Y \otimes \omega_X [\dim X]$$

$$\cong \mathcal{N}_{D^*(X)}(\mathcal{E}_Y)$$

$$= \mathcal{N}_{D^*(X)}(\Phi(\mathcal{O}_Y))$$

$$\text{よ.て.} \quad \Phi \circ \mathcal{N}_{D^*(M)}(\mathcal{O}_Y) \cong \mathcal{N}_{D^*(X)} \circ \Phi(\mathcal{O}_Y)$$

all  $\mathcal{O}_Y \in \Omega$  上 成り立つの  $\mathcal{O}_Y$ .  $\Phi$  は 同値

Q

Rem ( $\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}$  の様体,  $[Muk'81]$  の結果)

$A$  :  $\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}$  の様体,

$\hat{A} \cong \text{Pic}^0(A)$  : 双対  $\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}$  の様体,

( $\hat{A} := H^1(A, \mathcal{O}_A) / H^1(A, \mathbb{Z})$ ).

$P$  : fine moduli sp.  $\text{Pic}^0(A)$  に付随して  
普通束 (ホップカレ束)

- $\alpha \in \text{Pic}^0(A)$  に対し,  $P|_{\{\alpha\} \times A} \simeq \mathcal{L}_\alpha$   
ここで  $\mathcal{L}_\alpha$  は  $\alpha$  に対応する line bundle.
- $e \in A$  を加法の零元として,  $P|_{\hat{A} \times \{e\}} \simeq \mathcal{O}_{\hat{A}}$

Thm 2.54 ( $[Muk'81]$ )

Fourier - Mukai 変換

$$\Phi_{\hat{A} \rightarrow A}^P : D^b(\hat{A}) \longrightarrow D^b(A)$$

は三角圏の同値を与え.

② (Thm 5.33) を用いる.

$$\dim A = \dim \hat{A}, \quad \omega_A \cong \mathcal{O}_A \quad \#.$$

同型  $\mathbb{Z}$  対  $L_1, L_2 \in \text{Pic}^0(A)$  に対して.

$$\text{RHom}(L_1, L_2) = 0$$

例 示せよ. これは,

$$\forall L \in \text{Pic}^0(A) \setminus \{\mathcal{O}_A\}, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

$$H^i(A, L) = 0.$$

↓

と 同値.

これは. [Mumford Abelian Varieties Ch. 2-§ 8. (vii)]

にある. (Abelian Varieties の 3 巻 1-1 参照)

□

Thm 5.35

$X, Y$  : Smooth Projective Varieties.

Fourier-Mukai 写像

$$\Phi : D^b(X) \rightarrow D^b(Y)$$

成立.  $\alpha \in \mathcal{O}_X$  次  $\mathcal{O}_X$  成立.

(i)  $\Phi$   $\mathcal{O}_X$  fully-faithful  $\Leftrightarrow$  ある  $\mathcal{O}_X$ .

$$\forall x_1, x_2 \in X,$$

$$\mathrm{Hom}^i(\Phi(\mathcal{O}_{x_1}), \Phi(\mathcal{O}_{x_2})) = \begin{cases} \mathbb{C} & \begin{pmatrix} x_1 = x_2 \\ i = 0 \end{pmatrix} \\ 0 & \begin{pmatrix} x_1 \neq x_2 \text{ or } i \notin [0, \dim X] \end{pmatrix} \end{cases}$$

$\mathcal{O}_X$  成り立つ  $\Leftrightarrow$   $\mathcal{O}_Y$  は同値.

(ii)  $\Phi$   $\mathcal{O}_X$  fully-faithful  $\Leftrightarrow$  ある  $\mathcal{O}_Y$ .

$\Phi$   $\mathcal{O}_X$  同値  $\Leftrightarrow$  ある  $\mathcal{O}_Y$ .

$$\forall x \in X, \quad \Phi(\mathcal{O}_x) \otimes \omega_Y \cong \Phi(\mathcal{O}_x)$$

$\mathcal{O}_X$  成り立つ  $\Leftrightarrow$   $\mathcal{O}_Y$  は同値.

②

(i)  $\Phi$  は fully-faithful である。

$$\mathrm{Hom}^i(\Phi(\mathcal{O}_{x_1}), \Phi(\mathcal{O}_{x_2}))$$

$$\cong \mathrm{Hom}^i(\mathcal{O}_{x_1}, \mathcal{O}_{x_2}) = \begin{cases} \mathbb{C} & \begin{pmatrix} x_1 = x_2 \text{ かつ} \\ i = 0 \end{pmatrix} \\ 0 & \begin{pmatrix} x_1 \neq x_2 \text{ かつ} \\ i \notin [0, \dim X] \end{pmatrix} \end{cases}$$

逆方向について。

- $\Phi$  の核は  $\mathbb{Y}$  上平坦なわけではない。

(Thm 5.33) と また、 $t_2 < \dim X$  のとき。

- $\Phi$  の核は  $\mathbb{Y}$  上平坦ではない。

$$\mathrm{Ext}_M^i(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_2) \longrightarrow \mathrm{Ext}_M^i(\Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_1), \mathcal{O}_2)$$

、単射性は  $t_2$  に分ける。

あとで示す。

(ii)  $\Phi$  は 1 同値 ではない. (lem 4.1) により  $\dim X = \dim Y$ .  
 なることを示す.

$$\begin{aligned} & \Phi \circ \mathcal{N}_{D^1(X)}(\mathcal{O}_X) \\ & \stackrel{\mathcal{O}_X \otimes \omega_X \cong \mathcal{O}_X}{=} \Phi(\mathcal{O}_X \otimes \omega_X [\dim X]) \\ & \stackrel{(\cong)}{=} \Phi(\mathcal{O}_X) [\dim Y] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}_{D^1(Y)} \circ \Phi(\mathcal{O}_X) \\ & \cong \Phi(\mathcal{O}_X) \otimes \omega_Y [\dim Y] \end{aligned}$$

2<sup>nd</sup>. (Prop 3.7 (i)) により.  $\Phi$  は 1 同値 ではない.  
 $\Phi \circ \mathcal{N}_{D^1(X)} \cong \mathcal{N}_{D^1(Y)} \circ \Phi$ .

$$\therefore \Phi(\mathcal{O}_X) \otimes \omega_Y \cong \Phi(\mathcal{O}_X).$$

逆方向についても. ( $\dim X = \dim Y$  ならば Thm 3.18)  
 $E \in D^b(X)$ ,  $x \in X$ ,  $i \in \mathbb{Z}$  に対し.

$$\mathrm{Hom}^i(\mathcal{O}_x, \Phi^L(E)) \cong \mathrm{Hom}^{i + \dim Y - \dim X}(\mathcal{O}_x, \Phi^R(E))$$

↑  
 (Thm 3.18 と Prop 1.4)

$\Omega = \{ \mathcal{O}_x \mid x \in X \}$  は スパニング "類" なので.

$$\Phi^R(E) \cong 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi^L(E) \cong 0$$

よって, (Prop 3.17) より  $\Phi$  は 圏同値.

Rem. Prop 3.17

$\mathcal{C}$  : 非自明 な 三角圏.

$\mathcal{D}$  : 直既約 な 三角圏

$E \in \mathcal{D}$  に対し.

$$\lceil \Phi^R(E) \cong 0 \Rightarrow \Phi^L(E) \cong 0 \rceil$$

が 成り立つとき,  $\Phi$  は 三角圏の 圏同値.