

§ 5.5 安定層の局所変形理論

X : projective variety.

ω : X 上の ample line bdl.

$M_\omega(V)$: Gieseker-安定層のモジュライ空間.

(global)

- $M_\omega(V)$ の大域的構造を調べるのは難しい.

しかし、

(local)

- 与えられた点 $[E] \in M_\omega(V)$ の局所的構造を調べるのは、まだまし.

→ 変形理論.

$[E] \in M_w(\mathcal{V})$ を固定.

$\mathcal{A}rt$: $\mathbb{C}$ 上 の 有限次元 Artin 局所環 の 集合.

次に 反像写手

$$Def_E : \mathcal{A}rt \longrightarrow \mathcal{G}ets$$

を 次で 定める :

$$Def_E(R) := \left\{ (E, \phi) \mid \begin{array}{l} E \in Coh(X \times \text{Spec}(R)) ; R \text{ 上 平坦} \\ \phi : R/\mathfrak{m} \otimes_R E \xrightarrow{\sim} E \\ \quad (=0) \end{array} \right\}$$

ここで $R \in \mathcal{O}b(\mathcal{A}rt)$, $\mathfrak{m} : R$ の 極大 ideal.

$M_\omega(v)$ も存在する (定義より). 双射の同型.

$$\mathrm{Hom}(-, M_\omega(v)) \xrightarrow{\sim} M_\omega(v)(-)$$

も存在.

Thm (Huybrechts - Lehn Thm 4.5.1) より

上記の状況で,

$\hat{\mathcal{O}}_{M_\omega(v), [E]} \in \mathcal{O}_{M_\omega(v)}$ の $[E]$ における完備化
としたとき, $\hat{\mathcal{O}}_{M_\omega(v), [E]}$ は $\mathrm{Def}_E(-)$ を 副表現する.
(pw-represent)

つまり, 双射同型.

$$\mathrm{Hom}(\hat{\mathcal{O}}_{M_\omega(v), [E]}, -) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Def}_E(-)$$

も存在する.

これを $\mathbb{C}[t]/(t^2)$ に 代入すると.

$$T_{[E]} M_\omega(v) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Def}_E(\mathbb{C}[t]/(t^2))$$

$$T_{(E)} M_{\omega}(V) \xrightarrow{\sim} \text{Def}_E(\mathbb{C}[t]/(t^2))$$

Lemm 5.23

自然 同-視

$$(T_{(E)} M_{\omega}(V) \simeq) \text{Def}_E(\mathbb{C}[t]/(t^2)) \simeq \text{Ext}_X^1(E, E)$$

Λ^n 存在.

④

$$\text{Def}_E(\mathbb{C}[t]/(t^2)) = \left\{ (\mathcal{E}, \phi) \left| \begin{array}{l} \mathcal{E} \in \text{Coh}(X \times \text{Spec}(\mathbb{C}[t]/(t^2))) \\ \mathcal{E} \text{ は } \mathbb{C}[t]/(t^2) \text{ 上 } \mathbb{P} \text{ 平坦} \\ \phi: \mathcal{E}|_{X \times \text{pt}} \xrightarrow{\sim} E \end{array} \right. \right\}$$

$$(\mathcal{E}, \phi) \in \text{Def}_E(\mathbb{C}[t]/(t^2)) \quad \text{かつ} \quad \text{exact sq.}$$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\cdot t} \mathcal{O}_X[t]/(t^2) \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

$$f \longmapsto f \cdot t$$

$$\partial + f \cdot t \longmapsto \partial$$

に $\mathcal{E}$ を $\mathbb{P}$ -平坦に.

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{\cdot t} \mathcal{E} \rightarrow E \rightarrow 0$$

これは $\text{Ext}_X^1(E, E)$ の元を定めた.

逆に. $\eta \in \text{Ext}_X^1(E, E)$ あり存在する.

η に対応する $\text{Coh}(X)$ の exact sq.

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{u} \mathcal{E} \xrightarrow{v} E \rightarrow 0$$

も存在する.

$$\mathcal{E} \text{ の作用 } t : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \quad E.$$

$$\text{合成} \quad \mathcal{E} \xrightarrow{v} E \xrightarrow{u} \mathcal{E} \quad \text{で与えられる.}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{v} & E & \xrightarrow{u} & \mathcal{E} & \xrightarrow{v} & E \xrightarrow{u} \mathcal{E} \\ & \searrow \scriptstyle t & & \searrow \scriptstyle t & & \searrow \scriptstyle t & \\ & & & & & & \end{array}$$

(Red arrows labeled t and 0 indicate the action of t on the sequence.)

$$t \text{ の } t^2 = 0.$$

$$\therefore \mathcal{E} \in \text{Coh}(X \times_{\text{Spec}(\mathbb{C}[t]/(t^2))})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \mathcal{E} \text{ は } \mathbb{C}[t]/(t^2) \text{ 上 平準.} \\ \bullet \mathcal{E}|_X \xrightarrow{\phi} E. \end{array} \right. \quad ; \quad t=0 \text{ あり, } \mathcal{E}|_{t=0} \cong E. \\ (u=id, v=0)$$

$$\text{つまり. } (\mathcal{E}, \phi) \in \text{Def}_E(\mathbb{C}[t]/(t^2))$$

Def

$\psi : R' \rightarrow R$; Art における全射.

$m' \subset R'$; R' の極大 ideal.

$\ker(\psi) \cdot m' = 0$ が成立するとき,

ψ を 小拡大 (small extension) と呼ぶ.

このとき, $\ker(\psi)$ は R'/m' - 加群 である.

Prop 5.27

$\psi : R' \rightarrow R$; Art の小拡大.

$I := \ker(\psi)$

$\xi \in \text{Def}_E(R)$ である.

このとき, 障害類 (obstruction class) とよばれる

$$o(\xi) \in \text{Ext}_x^2(E, E) \otimes_{\mathbb{C}} I$$

が存在して,

$o(\xi) = 0 \iff \xi$ が $\xi' \in \text{Def}_E(R')$ に拡張される.

また, このとき, $\text{Ext}_x^1(E, E) \otimes_{\mathbb{C}} I$ は ξ' に自由かつ推移的に作用する.

Rem

(Prop 5.27) $\nexists$. $M_\omega(v)$ is not empty (= empty + condition is satisfied).

$$\text{Def}_E(R) \simeq \text{Hom}(\hat{\mathcal{O}}_{M_\omega(v), [E]}, R)$$

$R \in \mathbb{C}[t]/(t^3), \mathbb{C}[t]/(t^4), \dots, \mathbb{C}[t]/(t^n), \dots$
is a sequence

Cor 5.28

$${}^v[E] \in M_\omega(v).$$

$$\text{Ext}_X^2(E, E) = 0 \Rightarrow M_\omega(v) \text{ is smooth proj. var.}$$

Ex 5.21

C : smooth proj. curve.

$$M^s(r, d), \quad r \leq d \text{ is } \exists \text{ in } \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ext}_C^2(E, E) = 0 \text{ for all } E \in \text{Gh}(C)$$

is a smooth proj. variety.

[Proof of Prop 5.27]

一般の場合 (HL 2A.6)
resolution を用いる

簡単のため. E を locally free sheaf とする.

$$\mathrm{Ext}_X^i(E, E) \cong H^i(X, \mathrm{End}(E))$$

すなわち, 右辺 を Čech cohomology を使って計算する.

X の, 十分細かい Affine Open Covering $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ とする.

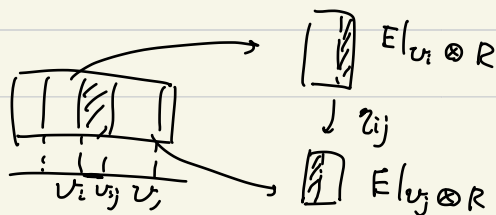
$\mathcal{E} \in \mathrm{Ref}_E(R)$ は, 同型.

$$\eta_{ij} : E|_{U_{ij}} \otimes_{\mathcal{O}} R \xrightarrow{\sim} E|_{U_{ij}} \otimes_{\mathcal{O}} R.$$

$$\eta_{ij} \otimes_R R/\mathfrak{m} = \mathrm{id}.$$

$$U_{ijk} \neq \emptyset. \quad \eta_{ij} \circ \eta_{jk} \circ \eta_{ki} = \mathrm{id} \quad (\text{cocycle 条件})$$

これを $\mathcal{E}$ の η とする.



$$\begin{array}{ccc}
 E|_{U_{ij}} \otimes_{\mathbb{C}} R & \xrightarrow{\eta_{ij}} & E|_{U_{ij}} \otimes_{\mathbb{C}} R \\
 \text{id} \otimes \psi \uparrow & \sim & \uparrow \text{id} \otimes \psi
 \end{array}$$

$$E|_{U_{ij}} \otimes_{\mathbb{C}} R' \xrightarrow[\sim]{\eta'_{ij}} E|_{U_{ij}} \otimes_{\mathbb{C}} R'$$

U_{ij} 上では η_{ij} が R' への射影 η'_{ij} に一致する。

η_{ij} は cocycle 条件 を満たすので、 U_{ijk} 上では

$$\begin{aligned}
 \eta'_{ij} \circ \eta'_{jk} \circ \eta'_{ki} &= \text{id} + O_{ijk} \\
 (O_{ijk} &\in \text{End}(E|_{U_{ijk}}) \otimes I)
 \end{aligned}$$

$\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$. $O(\mathcal{E}) := \{O_{ijk}\}_{ijk} \in \text{Ext}_X^2(E, E) \otimes_{\mathbb{C}} I$ とおく。

$\mathcal{E}$ に対し $\mathcal{E}'$ に射影する

$\Rightarrow \eta'_{ij}$ は cocycle 条件 を満たす。

$\Rightarrow O(\mathcal{E}) = 0$.

逆に, $O(\mathcal{E}) = \{O_{ijk}\}_{ijk} \in \text{Ext}_X^2(E, E) \otimes_{\mathbb{C}} I$ かつ

$$O(\mathcal{E}) = 0$$

と仮定する.

$$O_{ijk} = \nu_{ij} + \nu_{jk} + \nu_{ki}$$

と表せる. (coboundary) $(\nu_{ij} \in \text{End}(E|_{U_{ij}}) \otimes_{\mathbb{C}} I)$

ただし, η'_{ij} を $\eta'_{ij} - \nu_{ij}$ に置き換える.

この η'_{ij} かつ cocycle 条件

$$\eta'_{ij} \circ \eta'_{jk} \circ \eta'_{ki} = \text{id}$$

を満たす.

また, この族は ν_{ij} の取り方によって決まる.

$$\{\nu'_{ij}\}_{ij} \in \text{Ext}_X^1(E, E) \otimes_{\mathbb{C}} I$$

と書いて,

$$\eta'_{ij} \mapsto \eta'_{ij} + \nu'_{ij}$$

群作用を考えると, $\text{Ext}_X^1(E, E) \otimes_{\mathbb{C}} I$ かつ $\text{Def}_E(R)$ の元は自由かつ推移的に作用する.

Rem

Cor 5.28 の $\Leftarrow$

$$\lceil M_\omega(v) \text{ が 滑らか} \Rightarrow \text{Ext}_X^2(E, E) = 0 \rceil$$

$\Leftrightarrow$

$$\lceil \text{Ext}_X^2(E, E) \neq 0 \Rightarrow M_\omega(v) \text{ は 特異点 を 持つ} \rceil$$

は 成 立 不 成 立.

Ex 5.30

X : Smooth Proj. Variety (ω : ample line bd)

$$v = (1, 0, 0, \dots, 0) \in H^{2*}(X, \mathbb{R})$$

と お け る. $M_\omega(v)$ の 閉 点 は.

L : X 上 の rank 1 locally free sheaf
s.t. $c_1(L) = 0$.

に 対 応 する. 故 に.

$$H^2(X, \mathcal{O}_X) \neq 0 \Rightarrow \text{Ext}_X^2(L, L) \neq 0.$$

しか し. $M_\omega(v)$ は smooth になる.

(-)

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^* \rightarrow 1. \quad (\text{ex.})$$

は付随する exact sq.

$$0 \rightarrow H^1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$$

$$\xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \dots$$

を参考. $\text{Pic}^0(X) = \ker(c_1)$ とおくと.

$$\text{Mw}(V) = \text{Pic}^0(X)$$

$$-h. \quad \text{Pic}^0(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X) / H^1(X, \mathbb{Z})$$

は、複素トーラス (torus) smooth.

□

Rem

$\text{Pic}^0(X)$ は smooth である。
 $\text{rank}(E) > 0$ なる $E \in \text{Coh}(X)$ の
障害理論を精密化できる。

E : locally free sheaf

とある。トレース写像

$$\text{End}(E) \rightarrow \mathcal{O}_X$$

を、

$$\text{tr} : \text{Ext}_X^i(E, E) \rightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X) \\ (\cong H^i(X, \text{End}(E)))$$

を得る。

$$\text{Ext}_X^i(E, E)_{\underline{0}} := \ker(\text{tr} : \text{Ext}_X^i(E, E) \rightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X))$$

とある。

Prop 5.31

Prop 5.27 の状況で $\text{rk}(E) > 0$ とする。
このとき、

$$O(E) \in \text{Ext}_X^2(E, E)_0 \otimes_{\mathbb{C}} I$$

と成る。

よって、任意の $[E] \in M_w(V)$ に対して、

$$\text{Ext}_X^2(E, E)_0 = 0$$

$\Rightarrow M_w(V)$ は smooth projective variety?

①

E : locally free sheaf とする。

$$\eta'_{ij} \circ \eta'_{jk} \circ \eta'_{ki} = \text{id} + O_{ijk}$$

の行列式 $\det(E)$

$$\text{tr}(O(E)) = O(\det(E)) \in H^2(X, \mathcal{O}_X)$$

(ex, 5.30) より、 $\text{Pic}^0(X)$ は smooth である。

$$O(\det(E)) = 0$$

$$\therefore \operatorname{tr}(\circ(\mathcal{E})) = 0.$$

$$\begin{aligned} \therefore \circ(\mathcal{E}) &\in \ker(\operatorname{tr} : \operatorname{Ext}_X^2(E, E) \otimes 1 \rightarrow H^2(\mathcal{O}_X) \otimes 1) \\ &= \operatorname{Ext}_X^2(E, E)_0 \otimes 1. \end{aligned}$$

$$\operatorname{Ext}_X^2(E, E)_0 = 0 \quad \text{if } \dim X = 1 \quad \circ(\mathcal{E}) = 0.$$

□

[$\dim X \geq 2$ $z^n \notin M_w(v)$ ρ^{11} smooth 1-1 対応]

Ex 5.32

$S : H^1(\mathcal{O}_S) = 0$ 1-1 smooth proj. surface.

$$v = (1, 0, -n) \in H^0(S, \mathbb{Z}) \oplus H^2(S, \mathbb{Z}) \oplus H^4(S, \mathbb{Z})$$

$$\text{Hilb}^n(S) := \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ 次元部分空間 } \subset \mathbb{A}^n \subset S \\ \text{s.t. } \text{length } \mathcal{O}_Z = n \end{array} \right\}$$

このとき,

$$\begin{array}{ccc} \text{Hilb}^n(S) & \longrightarrow & M_w(v) \\ \downarrow \omega & & \downarrow \omega \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{Z} \end{array}$$

ω^n 同型 になる.

$\text{Hilb}^n(S)$ は smooth 1-1 の z^n

$M_w(v)$ は smooth.

②

$$\text{rk } E = 1$$

任意の $[E] \in M_n(\mathcal{V})$ に対して.

$$0 \rightarrow E \rightarrow E^{\vee\vee} \rightarrow Q \rightarrow 0$$

$$(\dim \text{Supp}(Q) = 0)$$

が存在.

$E^{\vee\vee}$ は $\text{rk}(E^{\vee\vee}) = 1$ の reflexive sheaf
かつ). line bdl.

($\dim \text{Supp}(E) = 2$ かつ). reflexive $\Leftrightarrow$ locally free)

$$\mathcal{V} = (1, 0, -n) \text{ かつ } c_1(E) = 0.$$

$$\therefore c_1(E^{\vee\vee}) = 0.$$

$$H^1(\mathcal{O}_S) = 0 \text{ かつ } \text{Pic}^0(S) = \{*\} \text{ かつ } E^{\vee\vee} \cong \mathcal{O}_S$$

$$\therefore 0 \rightarrow E \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow Q \rightarrow 0 \quad (\text{ex})$$

$$\dim \text{Supp}(Q) = 0 \text{ かつ.}$$

E は. 0次元部分スキーム $\Sigma \subset S$ の ideal 層 $\mathcal{I}_\Sigma$ と同型.

$$\begin{array}{ccc} \text{Hilb}^n(S) & \longrightarrow & M_n(\mathcal{V}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma & \longmapsto & \mathcal{I}_\Sigma \end{array}$$

は 全射. ($\text{rank } E = 1$ かつ)