

§ 5.5 安定層の局所変形理論

X : projective variety.

$$v \in \oplus H^{2i}(X, \mathbb{Q})$$

ω : X 上の ample line bdl.

↪ Thm 5.21

$M_\omega(v)$: Gieseker-安定層のモジュライ空間.

(global)

- $M_\omega(v)$ の大域的構造を調べるのは難しい.

しかし、

(local)

- 与えられた点 $[E] \in M_\omega(v)$ の局所的構造を調べるのは、まだまし.

→ 変形理論.

$[E] \in M_w(\mathcal{V})$ を固定.

$\mathcal{A}rt$: $\mathbb{C}$ 上, 有限次元 Artin 局所環, のなす圏.

$\mathbb{C}[t]/(t^2)$, $\mathbb{C}[t]/(t^4)$ など.

以下, 反変函手

$$Def_E : \mathcal{A}rt \longrightarrow \mathcal{G}ets$$

を次で定める:

$$Def_E(R) := \left\{ (E, \phi) \mid \begin{array}{l} E \in \mathcal{C}oh(X \times \text{Spec}(R)) ; R \text{ 上 平準} \\ \phi : R/\mathfrak{m} \otimes_R E \xrightarrow{\sim} E \\ \quad (=0) \end{array} \right\}$$

以下, $R \in \mathcal{O}b(\mathcal{A}rt)$, $\mathfrak{m} : R$ の極大ideal.

$M_\omega(v)$ も存在する (定義より). 双射の同型.

$$\mathrm{Hom}(-, M_\omega(v)) \xrightarrow{\sim} M_\omega(v)(-)$$

も存在.

Thm (Huybrechts - Lehn Thm 4.5.1 より)

上記の状況で,

$\hat{\mathcal{O}}_{M_\omega(v), [E]}$ は $\mathcal{O}_{M_\omega(v)}$ の $[E]$ における完備化
 としてとれる. $\hat{\mathcal{O}}_{M_\omega(v), [E]}$ は $\mathrm{Def}_E(-)$ を 副表現する.
 (pw-represent)

つまり, 双射同型.

$$\mathrm{Hom}(\hat{\mathcal{O}}_{M_\omega(v), [E]}, -) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Def}_E(-)$$

も存在する.

これを $\mathbb{C}[t]/(t^2)$ にあてはめると.

$$T_{[E]} M_\omega(v) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Def}_E(\mathbb{C}[t]/(t^2))$$

$$T_{(E)} M_{\omega}(V) \xrightarrow{\sim} \text{Def}_E(\mathbb{C}[t]/(t^2))$$

Lemm 5.23

自然 同-視

$$(T_{(E)} M_{\omega}(V) \simeq) \text{Def}_E(\mathbb{C}[t]/(t^2)) \simeq \text{Ext}_X^1(E, E)$$

Λ^n 存在.

④

$$\text{Def}_E(\mathbb{C}[t]/(t^2)) = \left\{ (\mathcal{E}, \phi) \left| \begin{array}{l} \mathcal{E} \in \text{Coh}(X \times \text{Spec}(\mathbb{C}[t]/(t^2))) \\ \mathcal{E} \text{ は } \mathbb{C}[t]/(t^2) \text{ 上 } \mathbb{P} \text{ 平坦} \\ \phi: \mathcal{E}|_{X \times \text{pt}} \xrightarrow{\sim} E \end{array} \right. \right\} \cong$$

$$(\mathcal{E}, \phi) \in \text{Def}_E(\mathbb{C}[t]/(t^2)) \quad \mathcal{E} \text{ は } \mathcal{E} \text{ 上の exact sq.}$$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\cdot t} \mathcal{O}_X[t]/(t^2) \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

$$f \longmapsto f \cdot t$$

$$\partial + f \cdot t \longmapsto \partial$$

に $\mathcal{E}$ を $\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_X[t]/(t^2)$ とする.

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{\cdot t} \mathcal{E} \rightarrow E \rightarrow 0$$

これは $\text{Ext}_X^1(E, E)$ の元を定めた.

逆に. $\eta \in \text{Ext}_X^1(E, E)$ あり存在する.

η に対応する $\text{Coh}(X)$ の exact sq.

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{u} \mathcal{E} \xrightarrow{v} E \rightarrow 0$$

も存在する.

$$\mathcal{E} \text{ の作用 } t : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \quad E.$$

$$\text{合成} \quad \mathcal{E} \xrightarrow{v} E \xrightarrow{u} \mathcal{E} \quad \text{成り立つ.}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{v} & E & \xrightarrow{u} & \mathcal{E} & \xrightarrow{v} & E \xrightarrow{u} \mathcal{E} \\ & \searrow \scriptstyle t & & \searrow \scriptstyle t & & \searrow \scriptstyle t & \\ & & & & & & \end{array}$$

(Red arrows labeled t and 0 indicate the action of t on the sequence.)

$$t^2 = 0.$$

$$\therefore \mathcal{E} \in \text{Coh}(X \times_{\text{Spec}(\mathbb{C}[t]/(t^2))})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \mathcal{E} \text{ は } \mathbb{C}[t]/(t^2) \text{ 上 } \mathbb{P}^1 \text{ 上} \\ \bullet \mathcal{E}|_{X \times \{0\}} \xrightarrow{\phi} E. \end{array} \right. \rightarrow E \text{ は locally free と } \mathbb{P}^1 \text{ 上 成り立つ.}$$

Ehr = locally free 成り立つ
 $\therefore t=0$ のとき, $\mathcal{E}|_{t=0} \xrightarrow{\cong} E$
 $(u = \text{id}, v = 0)$

$$\text{つまり. } (\mathcal{E}, \phi) \in \text{Def}_E(\mathbb{C}[t]/(t^2))$$

Def

$\psi : R' \rightarrow R$; Art における全射.

$m' \subset R'$; R' の極大 ideal.

$\ker(\psi) \cdot m' = 0$ が成立するとき,

ψ を 小拡大 (small extension) と呼ぶ.

(このとき, $\ker(\psi)$ は R'/m' - 加群 である.)

Prop 5.27

$\psi : R' \rightarrow R$; Art の小拡大.

$I := \ker(\psi)$

$\xi \in \text{Def}_E(R)$ である.

このとき, 障害類 (obstruction class) とよばれる

$$o(\xi) \in \text{Ext}_x^2(E, E) \otimes_{\mathbb{C}} I$$

が存在して,

$o(\xi) = 0 \iff \exists \text{ s.t. } \xi' \in \text{Def}_E(R')$ に拡張される.

また, このとき, $\text{Ext}_x^1(E, E) \otimes_{\mathbb{C}} I$ は ξ' に自由かつ推移的に作用する.

Rem

(Prop 5.27) $\nexists$. $M_\omega(\mathcal{U})$ is not separated (= not compact) $\Rightarrow$ $\text{Hom}(\text{Spec}(R), \text{Spec}(\hat{\mathcal{O}}_{M_\omega(\mathcal{U}), [E]}))$

is not empty:

$$\text{Def}_E(R) \simeq \text{Hom}(\hat{\mathcal{O}}_{M_\omega(\mathcal{U}), [E]}, R)$$

$$R \in \mathbb{C}[t]/(t^3), \mathbb{C}[t]/(t^4), \dots, \mathbb{C}[t]/(t^n), \dots$$

exists

is not empty. $M_\omega(\mathcal{U})$ is not smooth. (cf. Le Potier Thm 8.1.6)

Cor 5.28

$$[E] \in M_\omega(\mathcal{U}).$$

$$\text{Ext}_X^2(E, E) = 0 \Rightarrow M_\omega(\mathcal{U}) \text{ is smooth proj. var.}$$

Ex 5.21

$X = C$: smooth proj. curve.

$$M^s(r, d), \quad r \leq d \text{ is } \mathbb{Z} \text{ or } \frac{1}{2} \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ext}_C^2(E, E) = 0 \text{ for all } E \in \text{Gh}(C)$$

is not empty. $M^s(r, d)$ is smooth proj. variety.

[Proof of Prop 5.27]

一般の場合 (HL 2A.6)
resolution を用いる

簡単のため. E を locally free sheaf とする.

$$\mathrm{Ext}_X^i(E, E) \cong H^i(X, \mathrm{End}(E))$$

すなわち, 右辺 を Čech cohomology を用いて計算する.

X の, 十分細かい Affine Open Covering $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ とする.

$\mathcal{E} \in \mathrm{Ref}_E(R)$ は, 同型.

$$\eta_{ij} : E|_{U_{ij}} \otimes_{\mathcal{O}} R \xrightarrow{\sim} E|_{U_{ij}} \otimes_{\mathcal{O}} R.$$

$$\text{すなわち, } \eta_{ij} \otimes_R R/\mathfrak{m} = \mathrm{id}_E$$

$$U_{ijk} \neq \emptyset. \quad \eta_{ij} \circ \eta_{jk} \circ \eta_{ki} = \mathrm{id} \quad (\text{cocycle 条件})$$

これを $\mathcal{E}$ の η とする.

$$\begin{array}{ccc} & & E|_{U_i} \otimes R \\ & \nearrow & \downarrow \eta_{ij} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline U_i & U_j & U_k \\ \hline \end{array} & & E|_{U_j} \otimes R \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 E|_{U_{ij}} \otimes_{\mathbb{C}} R & \xrightarrow{\eta_{ij}} & E|_{U_{ij}} \otimes_{\mathbb{C}} R \\
 \text{id} \otimes \psi \uparrow & \sim & \uparrow \text{id} \otimes \psi
 \end{array}$$

$$E|_{U_{ij}} \otimes_{\mathbb{C}} R' \xrightarrow[\sim]{\eta'_{ij}} E|_{U_{ij}} \otimes_{\mathbb{C}} R'$$

U_{ij} 上では η_{ij} の R' への拡張 η'_{ij} が存在する。
(I の $\mathbb{C}$ 上の R' への拡張)

η_{ij} が cocycle 条件 を満たすので、 U_{ijk} 上では

$$\eta'_{ij} \circ \eta'_{jk} \circ \eta'_{ki} = \text{id} + O_{ijk}$$

$(O_{ijk} \in \text{End}(E|_{U_{ijk}}) \otimes I)$

$\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$. $O(\mathcal{E}) := \{O_{ijk}\}_{ijk} \in \text{Ext}_{\mathcal{X}}^2(E, E) \otimes_{\mathbb{C}} I$
 とおく。

$\mathcal{E}$ が $\mathcal{E}'$ に拡張する

$\Rightarrow \eta'_{ij}$ は cocycle 条件 を満たす。

$\Rightarrow O(\mathcal{E}) = 0$.

逆に, $O(\mathcal{E}) = \{O_{ijk}\}_{ijk} \in \text{Ext}_X^2(E, E) \otimes_{\mathbb{C}} I$ かつ

$$O(\mathcal{E}) = 0$$

と仮定する.

$$O_{ijk} = \mathcal{V}_{ij} + \mathcal{V}_{jk} + \mathcal{V}_{ki}$$

と表せる. (coboundary) $(\mathcal{V}_{ij} \in \text{End}(E|_{U_{ij}}) \otimes_{\mathbb{C}} I)$

たのび. η'_{ij} を $\eta'_{ij} - \mathcal{V}_{ij}$ に置き換える.

この η'_{ij} かつ cocycle 条件

$$\eta'_{ij} \circ \eta'_{jk} \circ \eta'_{ki} = \text{id}$$

を満たす.

また, この拡張は $\mathcal{V}_{ij}$ の取り方によって決まる.

$$\{\mathcal{V}'_{ij}\}_{ij} \in \text{Ext}_X^1(E, E) \otimes_{\mathbb{C}} I$$

と書いて.

$$\eta'_{ij} \mapsto \eta'_{ij} + \mathcal{V}'_{ij}$$

同作用を考慮すれば, $\text{Ext}_X^1(E, E) \otimes_{\mathbb{C}} I$ かつ $\text{Def}_E(R)$ の元に自由かつ推移的に作用する.

[具体的計算]

$$0 \rightarrow I \rightarrow R' \xrightarrow{\varphi} R \rightarrow 0$$

$m \subset R$, $m' \subset R'$: maximal ideals

E は "locally free $\mathcal{O}_X$ -mod". $\mathcal{E}$ と $\bar{\mathcal{E}}$ は locally free.

m の R/m -vec. sp. $\mathcal{E}|_U$ の 基底 $e_1, \dots, e_n$ とおく.

R の 積演算 を " $\cdot$ ", R' の 積演算 を " $*$ " と表す.

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i v_i \right) * \left(\sum_{i=1}^n a_i v_i \right) = \left(\sum_{i=1}^n a_i v_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_i v_i \right) + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} a_i a_j w$$

と表す. ($\{b_{ij}\}$ は 対称行列) ($w \in I$, $w^2=0$)
 $(w \cdot v_i = 0)$
 とす. (Prop 5.27) の

$$\eta_{\alpha\beta} : E|_{U_{\alpha\beta}} \otimes R \xrightarrow{\sim} E|_{U_{\alpha\beta}} \otimes R$$

は. $\eta_{\alpha\beta}^i \in H^0(U_{\alpha\beta}, \text{End}(E))$ とす.

$$\eta_{\alpha\beta} = \text{id}_E + \sum_{i=1}^n \eta_{\alpha\beta}^i v_i$$

と表す.

$\eta_{\alpha\beta}$ は cocycle 条件 $\eta_{\alpha\beta} \cdot \eta_{\beta\gamma} = \eta_{\alpha\gamma}$ を満たす。

$$\left(\text{id}_E + \sum_{i=1}^n \eta_{\alpha\beta}^i v_i \right) \cdot \left(\text{id}_E + \sum_{i=1}^n \eta_{\beta\gamma}^i v_i \right) = \text{id}_E + \sum_{i=1}^n \eta_{\alpha\gamma}^i v_i. \quad (*)$$

これは成り立つ。

$\eta_{\alpha\beta}$ の $V_{\alpha\beta}$ 上での制限 $\eta'_{\alpha\beta}$ は、

$$\eta'_{\alpha\beta} = \text{id}_E + \sum_{i=1}^n \eta_{\alpha\beta}^i v_i + \eta_{\alpha\beta} \omega$$

$$(\eta_{\alpha\beta} \in H^1(V_{\alpha\beta}, \text{End}(E)))$$

と表せる。

これは存在する必要十分条件は、

$\{\eta'_{\alpha\beta}\}$ は cocycle 条件を満たすこと。つまり、

$$(\text{id}_E + \sum \eta'_{\alpha\beta} v_i + \eta_{\alpha\beta} \omega) * (\text{id}_E + \sum \eta'_{\beta\gamma} v_i + \eta_{\beta\gamma} \omega)$$

$$= \text{id}_E + \sum \eta_{\alpha\gamma}^i v_i + \eta_{\alpha\gamma} \omega.$$

— (**)

これは成り立つことはわかる。(*) と (**) の ω の係数を比較して、

$$\begin{aligned} \sum b_{ij} \eta_{\alpha\beta}^i \eta_{\beta\gamma}^j &= -\eta_{\alpha\beta} - \eta_{\beta\gamma} + \eta_{\alpha\gamma} \\ &= -\partial \{ \eta_{\alpha\beta} \} \end{aligned}$$

を得る。 $0(\varepsilon) = \sum b_{ij} \eta_{\alpha\beta}^i \eta_{\beta\gamma}^j$ である $(P_{\text{top}} S^2)$ の各点

Rem

Cor 5.28 の $\Leftarrow$

$$\lceil M_\omega(v) \text{ が 滑らか} \Rightarrow \text{Ext}_X^2(E, E) = 0 \rceil$$

$\Leftrightarrow$

$$\lceil \text{Ext}_X^2(E, E) \neq 0 \Rightarrow M_\omega(v) \text{ は 特異点 を 持つ} \rceil$$

は 成 立 不 成 立.

Ex 5.30

X : Smooth Proj. Variety (ω : ample line bd)

$$v = (1, 0, 0, \dots, 0) \in H^{2*}(X, \mathbb{R})$$

と お け ば. $M_\omega(v)$ の 閉 点 は.

L : X 上 の rank 1 locally free sheaf
s.t. $c_1(L) = 0$.

に 対 応 する. 故 ち.

$$H^2(X, \mathcal{O}_X) \neq 0 \Rightarrow \text{Ext}_X^2(L, L) \neq 0.$$

しか し. $M_\omega(v)$ は smooth になる.

(-)

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^* \rightarrow 1. \quad (\text{ex.})$$

は付随する exact sq.

$$0 \rightarrow H^1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$$

$$\xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \dots$$

を参考. $\text{Pic}^0(X) = \ker(c_1)$ とおくと.

$$\text{Mw}(U) = \text{Pic}^0(X)$$

$$-h. \quad \text{Pic}^0(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X) / H^1(X, \mathbb{Z})$$

は、複素トーラス (torus) smooth.

□

Rem

$\text{Pic}^0(X)$ は smooth になる。
 $\text{rank}(E) > 0$ なる $E \in \text{Coh}(X)$ の
障害理論を精密化できる。

E : locally free sheaf

とある。トレス写像

$$\text{End}(E) \rightarrow \mathcal{O}_X$$

より、

$$\text{tr} : \text{Ext}_X^i(E, E) \rightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X) \\ (\cong H^i(X, \text{End}(E)))$$

を得る。

$$\text{Ext}_X^i(E, E)_{\underline{0}} := \ker(\text{tr} : \text{Ext}_X^i(E, E) \rightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X))$$

とある。

(- 任意の $E \in \text{Coh}(X)$ に対する trace map の構成は
Huybrechts FM in AG の p.77
(X : regular)

Prop 5.31

Prop 5.27 の状況で $\text{rk}(E) > 0$ とする。
このとき.

$$O(E) \in \text{Ext}_X^2(E, E)_0 \otimes_{\mathbb{C}} I$$

と成る.

よって, 任意の $[E] \in M_w(V)$ に対して,

$$\text{Ext}_X^2(E, E)_0 = 0$$

$\Rightarrow M_w(V)$ は smooth projective variety.

(-!)

E : locally free sheaf とする.

$$\eta_{ij} \circ \eta_{jk} \circ \eta_{ki} = \text{id} + O_{ijk} \quad (5.18)$$

の行列式は

$$\text{tr}(O(E)) = O(\det(E)) \in H^2(X, \mathcal{O}_X) \otimes I$$

(ex, 5.3-) 等. $\text{Pic}^0(X)$ は smooth である.

$$O(\det(E)) = 0$$

Le Potier Lem 8.1.6

(A Variety X は n 次元 smooth $\Leftrightarrow \text{Hom}(\hat{\mathcal{O}}_{X,a}, R) \cong \text{Hom}(\hat{\mathcal{O}}_{X,a}, R')$ $\subset \mathbb{C}^n$)
 $R, R' \in \text{Art}$

$$\therefore \operatorname{tr}(\circ(\mathcal{E})) = 0.$$

$$\begin{aligned} \therefore \circ(\mathcal{E}) &\in \ker(\operatorname{tr} : \operatorname{Ext}_X^2(E, E) \otimes 1 \rightarrow H^2(\mathcal{O}_X) \otimes 1) \\ &= \operatorname{Ext}_X^2(E, E)_0 \otimes 1. \end{aligned}$$

$$\operatorname{Ext}_X^2(E, E)_0 = 0 \quad \text{if } \dim X = 1 \quad \circ(\mathcal{E}) = 0.$$

□

[具体的計算]

まず, ζ の $\det(\zeta)$ の変換函数の $\det_R \zeta$ は:

$$d_{\alpha\beta} := \det_R (\text{id}_E + \sum \eta_{\alpha\beta}^i v_i)$$

$$= 1 + \sum d_{\alpha\beta}^i v_i \quad (d_{\alpha\beta}^i \in \mathcal{O}_x(\mathcal{U}_{\alpha\beta}))$$

$\{d_{\alpha\beta}\}$ は $\det(\zeta)$ の変換函数に付, 2-3 の $\mathbb{Z}^n$.

cocycle 条件 を 与える:

$$(1 + \sum d_{\alpha\beta}^i v_i) \cdot (1 + \sum d_{\beta\gamma}^i v_i) = 1 + \sum d_{\alpha\gamma}^i v_i \quad (*)$$

一方, $\det(\widehat{\zeta})$ は $\det(\zeta)$ を R' 上に $\mathbb{Z}$ 張ったもの.

すなわち, $\widehat{\zeta}$ の変換函数は,

$$\widetilde{d}_{\alpha\beta} = 1 + \sum d_{\alpha\beta}^i v_i + g_{\alpha\beta} w$$

$(g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}_x(\mathcal{U}_{\alpha\beta}))$ を表す.

$\{\tilde{d}_{\alpha\beta}\} \in R' \otimes \mathbb{C}^n$ cocycle 条件 $\in \mathbb{Z}^n \otimes \mathbb{C}^n$.

$$\tilde{d}_{\alpha\beta} * \tilde{d}_{\beta\gamma} = \tilde{d}_{\alpha\gamma}$$

$$\text{i.e.} \quad \left(1 + \sum d_{\alpha\beta}^i v_i + g_{\alpha\beta} \omega \right) * \left(1 + \sum d_{\beta\gamma}^i v_i + g_{\beta\gamma} \omega \right) \\ = \left(1 + \sum d_{\alpha\gamma}^i v_i + g_{\alpha\gamma} \omega \right) \quad - (**)$$

(*) , (**) の ω の係数 $\in \mathbb{C}^n$.

$$\sum b_{ij} d_{\alpha\beta}^i d_{\beta\gamma}^j = -g_{\alpha\beta} - g_{\beta\gamma} + g_{\alpha\gamma} \\ (o(\det(\varepsilon))) = -\partial(\{g_{\alpha\beta}\}).$$

- ち. $\eta_{\alpha\beta}$ の 行列式 $\in R' \otimes \mathbb{C}^n$ 直接 $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ を考えよ.

これは, $\{\tilde{d}_{\alpha\beta}\}$ と ω の係数 $\mathbb{C}^n$ 違うだけ $\leftarrow$ $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$
 $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$

$$\det_{R'}(\eta_{\alpha\beta}) = 1 + \sum d_{\alpha\beta}^i v_i + g_{\alpha\beta} \omega.$$

$\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$, line bundle には 障害 $\mathbb{C}^n$ がある.

$\{d_{\alpha\beta}\}$ is 1-cocycle.

$$\det_{R'} (\eta_{\alpha\beta}) * \det_{R'} (\eta_{\beta\tau}) = \det_{R'} (\eta_{\alpha\beta} * \eta_{\beta\tau})$$

の両辺を R' 上にて計算する。

(L.H.S)

$$\begin{aligned} &= (1 + \sum d_{\alpha\beta}^i v_i + \delta_{\alpha\beta} w) * (1 + \sum d_{\beta\tau}^i v_i + \delta_{\beta\tau} w) \\ &= (1 + \sum d_{\alpha\beta}^i v_i) \cdot (1 + \sum d_{\beta\tau}^i v_i) \\ &\quad + (\sum b_{ij} d_{\alpha\beta}^i d_{\beta\tau}^j + \delta_{\alpha\beta} + \delta_{\beta\tau}) w \\ &= 1 + \sum d_{\alpha\tau}^i v_i + (-\partial\{\delta_{\alpha\beta}\} + \delta_{\alpha\beta} + \delta_{\beta\tau}) w. \end{aligned}$$

(R.H.S)

$$\begin{aligned} &= \det_{R'} \left((id_E + \sum \eta_{\alpha\beta}^i v_i) * (id_E + \sum \eta_{\beta\tau}^i v_i) \right) \\ &= \det_{R'} \left((id_E + \sum \eta_{\alpha\beta}^i v_i) \cdot (id_E + \sum \eta_{\beta\tau}^i v_i) + (\sum b_{ij} \eta_{\alpha\beta}^i \eta_{\beta\tau}^j) w \right) \\ &= \det_{R'} \left(id_E + \sum \eta_{\alpha\tau}^i v_i + (\sum b_{ij} \eta_{\alpha\beta}^i \eta_{\beta\tau}^j) w \right) \\ &\stackrel{*}{=} \det_{R'} \left(id_E + \sum \eta_{\alpha\tau}^i v_i \right) + \text{tr} \left(\sum b_{ij} \eta_{\alpha\beta}^i \eta_{\beta\tau}^j \right) w \quad (v_i \cdot w = w^2 = 0) \\ &= 1 + \sum d_{\alpha\tau}^i v_i + \delta_{\alpha\tau} w + \text{tr} \left(\sum b_{ij} \eta_{\alpha\beta}^i \eta_{\beta\tau}^j \right) w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{tr} \left(\sum b_{ij} \eta_{\alpha\beta}^i \eta_{\beta\tau}^j \right) &= \partial(\{\delta_{\alpha\beta}\} - \{\delta_{\alpha\tau}\}) \\ &\quad \left(= -\partial(\{\delta_{\alpha\beta}\}) \right) = 0 \quad \text{in } H^2(\mathcal{O}_X) \\ &\quad \text{tr}(O(\varepsilon)) \quad \leftarrow \text{co-boundary} \end{aligned}$$

$$\det(\eta'_{\alpha\beta}) \cdot \det(\eta'_{\beta\gamma}) \cdot \det(\eta'_{\gamma\alpha}) = \det(\text{id} + O_{ijk})$$

$$= 1 + \text{tr}(O_{ijk})$$

↖ (3)

$$\det \begin{pmatrix} 1+O_{11} & O_{12} & \dots & O_{1n} \\ & 1+O_{22} & & \\ & & \ddots & \\ O_{n1} & & & 1+O_{nn} \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \sum_i \sum_j \\ O_{ijk} = \{O_{\alpha\beta}\} \end{array} \right)$$

$$= (1+O_{11}) \dots (1+O_{nn})$$

$$(\sum_i O_{ij} \cdot O_{ki} = 0)$$

$$= 1 + (O_{11} + \dots + O_{nn})$$

$$= 1 + \text{tr}(O_{ijk})$$

[$\dim X \geq 2$ $z^n \notin M_w(v)$ ρ^{11} smooth 1-1 対応]

Ex 5.32

$S : H^1(\mathcal{O}_S) = 0$ 1-1 smooth proj. surface.

$$v = (1, 0, -n) \in H^0(S, \mathbb{Z}) \oplus H^2(S, \mathbb{Z}) \oplus H^4(S, \mathbb{Z})$$

$$\text{Hilb}^n(S) := \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ 次元部分空間 } \subset \mathbb{A}^n \subset S \\ \text{s.t. } \text{length } \mathcal{O}_Z = n \end{array} \right\}$$

このとき,

$$\begin{array}{ccc} \text{Hilb}^n(S) & \longrightarrow & M_w(v) \\ \downarrow \omega & & \downarrow \omega \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{Z} \end{array}$$

ω^n 同型 になる.

$\text{Hilb}^n(S)$ は smooth 1-1 の z^n

$M_w(v)$ も smooth.

②

$$\text{rk } E = 1$$

任意の $[E] \in M_n(\mathcal{V})$ に対して.

$$0 \rightarrow E \rightarrow E^{\vee\vee} \rightarrow Q \rightarrow 0$$

$$(\dim \text{Supp}(Q) = 0)$$

が存在.

$E^{\vee\vee}$ は $\text{rk}(E^{\vee\vee}) = 1$ の reflexive sheaf
 かつ). line bdl.

($\dim \text{Supp}(E) = 2$ かつ). reflexive $\Leftrightarrow$ locally free)

$$\mathcal{V} = (1, 0, -n) \text{ かつ } G(E) = 0.$$

$$\therefore C_1(E^{\vee\vee}) = 0.$$

$$H^1(\mathcal{O}_S) = 0 \text{ かつ } \text{Pic}^0(S) = \{*\} \text{ かつ } E^{\vee\vee} \cong \mathcal{O}_S$$

$$\therefore 0 \rightarrow E \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow Q \rightarrow 0 \quad (ex)$$

$$\dim \text{Supp}(Q) = 0 \text{ かつ.}$$

E は. 0次元部分スキーム $\Sigma \subset S$ の ideal 層 $\mathcal{I}_\Sigma$ と同型.

$$\begin{array}{ccc} \text{Hilb}^n(S) & \longrightarrow & M_n(\mathcal{V}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma & \longmapsto & \mathcal{I}_\Sigma \end{array}$$

は 全射. ($\mathcal{V}$ が 1 射)