§5.2 高次元代数多様体上の(半)安定層

X : $\dim X \geqq 2$ な代数多様体

のとき、ベクトル束だけだと、モジュライ空間の
"良い"コンパクト化が得られない…

$\Longrightarrow$ 連接層のモジュライ空間を考察する!!

安定性のモノサシが2種類

$$\begin{cases} ① \ \text{slope} \\ ② \ \text{Hilbert polynomial} \end{cases}$$

① slope (傾斜) について

ample line bdl 付き.

$(X, \mathcal{O}_X(1))$: $\dim X = d$ の smooth polarized projective variety.

Notation

$\omega := \mathcal{O}_X(1)$ としたり

$c_1(\omega) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ も ω で表したりする.

$E \in \mathrm{Coh}(X)$ に対して.

$$\mu_\omega(E) := \frac{c_1(E).\omega^{d-1}}{\mathrm{rk}(E)}$$

と定め. E の ω に関する傾斜 (slope) と呼ぶ.

($\mathrm{rk}(E) = 0$ なら $\mu = \infty$).

Rem

X : integral scheme なら.

$E \in \mathrm{Coh}(X)$ に対して.

Open dense subset $U \subset X$ が存在して.

$E|_U$ は locally free $\rightsquigarrow$ $\mathrm{rk}(E) := \mathrm{rk}(E|_U)$.

Def (slope stability)

X 上の 連接層 E は,

任意の 部分層 $0 \subsetneq F \subsetneq E$ に対して

$$\mu_\omega(F) \underset{(-)}{\leq} \mu_\omega(E/F)$$

が 成り立つとき, μ_ω − (半) 安定 という

(μ_ω − (semi) stable)

② Hilbert polynomial について.

$$E \in \mathrm{Coh}(X).$$

$$E := E \otimes \omega^m \qquad (E \otimes \mathcal{O}_X(m)) \quad \text{に対し.}$$

$$\chi(E(m)) := \sum_{i=0}^{d} (-1)^i \dim H^i(X, E(m)) \qquad \in \mathbb{Q}[m]$$

と定める.

これは. E の Hilbert 多項式 (Hilbert polynomial)

とよばれる.

$$\chi(E(m)) := a_k m^k + a_{k-1} m^{k} + \cdots + a_0$$

$(a_i \in \mathbb{Q},\ a_k \neq 0)$

と表すと. $k = \dim E := \dim \mathrm{Supp}(E)$. となる. (命5.10)

$$\chi(E(m)) = \sum_{i=0}^{k} a_i m^i$$ と表して.

$$\overline{\chi}(E(m)) := \frac{\chi(E(m))}{a_k}$$

とおく. $\overline{\chi}(E(m))$ は. 被約 Hilbert 多項式 とよばれる.
(reduced Hilbert polynomial).

Def 5.12 (Gieseker 安定性)

$E \in \mathrm{Coh}(X)$ は.
次の条件をみたすとき. ω- Gieseker (半)安定
といわれる.

(i) E は 純粋 (pure)

i.e., $0 \subsetneq {}^{\forall}F \subsetneq E$ に対し.

$$\dim \mathrm{Supp}(F) = \dim \mathrm{Supp}(E).$$

(ii) $0 \subsetneq {}^{\forall}F \subsetneq E$, ${}^{\forall}m \gg 0$,

$$\overline{\chi}(F(m)) \underset{(=)}{<} \overline{\chi}(E(m))$$

§5.3 (半)安定層のモジュライ空間

X : smooth proj. var.
ω : X 上の ample divisor

与えられた $v \in H^{2*}(X, \mathbb{R})$ $\left(= \bigoplus_i H^{2i}(X, \mathbb{R})\right)$
に対して、$ch(E) = v$ となる
X 上の Gieseker 安定層のモジュライ空間について考える.

表現関手

$$\mathcal{M}_\omega(v) : (\mathcal{S}ch/\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{S}ets$$
$$T \longmapsto \mathcal{M}_\omega(v)(T)$$

を、次のように定める.

$$\mathcal{M}_\omega(v)(T) = \left\{ \mathcal{F} \in Coh(X \times T) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathcal{F} \text{ は } T \text{ 上 flat}, \quad \forall t \in T \\ \mathcal{F}_t := \mathcal{F}|_{X \times \{t\}} \text{ は } \omega\text{-安定層}, \ ch(\mathcal{F}_t) = v \end{array} \right\} \Big/ \sim$$

ここで、$\mathcal{F} \sim \mathcal{F}'$
$\overset{def}{\iff}$ $\exists \mathcal{L}$: T 上の line bdl.
s.t. $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}' \otimes p_T^* \mathcal{L}$.

Def 5.17

有限型スキーム $M_\omega(v)$ が存在して、函手的同型

$$\mathrm{Hom}(-, M_\omega(v)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_\omega(v)(-)$$

が存在するとき、$M_\omega(v)$ を、$ch(E) = v$ である
ω-安定層のモジュライ空間 (moduli space of ω-stable sheaves)
と呼ぶ。

反変函手

また、このとき、$\mathcal{M}_\omega(v)(-)$ はスキーム $M_\omega(v)$
で表現されている、といい、函手 $\mathcal{M}_\omega(v)(-)$ は
表現可能 (representable) である、という。

$$\mathrm{Hom}(M_\omega(v), M_\omega(v)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_\omega(v)(M_\omega(v))$$

で、$id_{M_\omega(v)}$ に対応する

$$\mathcal{E} \in \mathrm{Coh}(X \times M_\omega(v))$$

は、普遍層 (universal sheaf) とよばれる。

$$\left(\begin{array}{c} E \in \mathrm{Coh}(X) \text{ に対応する } t \in M_\omega(v) \text{ をとって、} \\ \mathcal{E}_t \simeq E \end{array} \right)$$

モジュライ空間 $M_\omega(v)$ が存在する、と仮定。

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(\mathbb{C}), M_\omega(v)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_\omega(v)(\mathrm{Spec}(\mathbb{C}))$$

を考えれば、

$$\{M_\omega(v) \text{ の閉点}\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{ \mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathcal{F} \text{ は } \omega\text{-安定} \\ \mathrm{ch}(\mathcal{F}) = v \end{array} \right\} \Big/ \sim$$

しかし、必ずしも (Def 5.17) の モジュライ空間が 存在する訳では ない …

しかし、v と ω に関する ある種の 数値条件 が 満たされれば、モジュライ空間 が 存在する。(ことが示せる)。

$\chi(v(m))$, $\overline{\chi}(v(m)) \in \mathbb{Q}[m]$ を、

$$\begin{cases} \chi(v(m)) := \int_X v \cdot e^{m\omega}\, td_X \\ \overline{\chi}(v(m)) := \dfrac{\chi(v(m))}{a_k} \end{cases}$$

で 定める。($k = \deg(\chi(v(m)))$)

$\mathrm{ch}(E) = v$ となる $E \in \mathrm{Coh}(X)$ が存在すれば

$$\begin{cases} \chi(v(m)) = \chi(E(m)) \\ \overline{\chi}(v(m)) = \overline{\chi}(E(m)) \end{cases}$$

Def 5.19

$v \in H^{2*}(X, \mathbb{Q})$ が、すべての $m \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\chi(v(m)) \in \mathbb{Z}$$

また、これらの公約数が 1 のとき、

ω-原始的 (ω-primitive) という。

Thm 5.21

v が ω-原始的 であると仮定。

このとき、$\mathrm{ch}(E) = v$ となる ω-安定層の

モジュライ空間 $M_\omega(v)$ が存在する。

しかも、$M_\omega(v)$ は 射影的スキーム になる。

例

$X = C$: smooth proj. alg. curve.

ω : C 上の次数 1 の ample divisor.

$v := (r, d) \in H^0(C, \mathbb{Z}) \oplus H^2(C, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{\oplus 2}$

このとき、v が ω-原始的なことと、

(r, d) が互いに素であることが同値。

よって、(r, d) が互いに素なら

$M^s(r, d)$ は $M_\omega(v)$ の閉点と同一視でき、

$M^s(r, d)$ には Proj. scheme の構造が入る。

例 5.22

(i) $C = \mathbb{P}^1$ なら、(問 5.3) より、

$$M^s(r, d) \neq \phi \iff r = 1.$$

$$M^s(1, d) = \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$$

$$\uparrow$$

$$E \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d) \text{ のみ.}$$

(ii) C : elliptic curve.

$x_0 \in C$ を fix.

互いに素な $(r,d) \in \mathbb{Z}^{\oplus 2}$ をとる.

このとき.

$$\begin{array}{ccc} M^s(r,d) & \xrightarrow{\sim} & M(1,d) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ E & \longmapsto & \det(E) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\sim} & M(1,d) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x & \longmapsto & \mathcal{O}_C((d+1)x_0 - x) \end{array}$$

反変関手

$$\overline{\mathcal{M}}_\omega(v) : (\mathcal{S}ch/\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{S}ets$$

を, $T \in (\mathcal{S}ch/\mathbb{C})$ に対して, 次で定義 :

$$\overline{\mathcal{M}}_\omega(v)(T) = \left\{ \mathcal{F} \in Coh(X \times T) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathcal{F} \text{ は } T \text{ 上平坦}, \ \forall t \in T \\ \mathcal{F}_t := \mathcal{F}|_{X \times \{t\}} \text{ は } \omega\text{-半安定} \\ ch(\mathcal{F}_t) = v \end{array} \right\} \Big/ \sim$$

Thm 5.23

Projective scheme $\overline{M_\omega(v)}$，および自然変換

$$\tau : \overline{M_\omega(v)} \longrightarrow \mathrm{Hom}(-, \overline{M_\omega(v)})$$

が存在して、次の普遍性をみたす：

任意の scheme M および、与えられた自然変換

$$\theta : \overline{M_\omega(v)}(-) \longrightarrow \mathrm{Hom}(-, M)$$

に対し、射

$$f : \overline{M_\omega(v)} \longrightarrow M$$

であって、

次が可換になるものが唯一つ存在。

$$\begin{tikzcd}
\overline{M_\omega(v)}(-) \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\theta"'] & \mathrm{Hom}(-, \overline{M_\omega(v)}) \arrow[d, "f_*"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\
& \mathrm{Hom}(-, M)
\end{tikzcd}$$

(Thm 5.23) の $\overline{M}_\omega(v)$ の各閉点は、
"Poly stable sheaf" と 1対1 に対応している。

「 $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$.
各 E_i は ω-安定.
$v_i = ch(E_i)$ とすると.

$$\overline{\chi}(v_i(m)) = \overline{\chi}(v(m))$$

かつ

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_k = v$$ 」

さらに、 ω-安定層 に対応する $\overline{M}_\omega(v)$ の
Open sub scheme

$$M_\omega(v)$$

が存在.

Ref

$M_\omega(v)$ を、 ω-安定層の粗モジュライ空間
(Coarse moduli space)

$\overline{M}_\omega(v)$ を、 ω-半安定層の良モジュライ空間
(Good moduli space)

という

§ 5.4 (半)安定層のモジュライ空間の構成

[$M_\omega(v)$ の構成の手順]

まず、 ω-半安定で $ch(E)=v$ となる
$E \in Coh(X)$ の同型類の集合は有界であると示せる。

i.e. $\mathbb{C}$ 上の有限型の scheme T と、
T 上平坦な $\mathcal{E} \in Coh(X \times T)$ が存在して
次が成立：

「任意の $ch(E)=v$ となる ω-半安定層 E に対して
ある $t \in T$ が存在して、

$$E \cong \mathcal{E}|_{X \times \{t\}}$$

」

このことから、 $\mathcal{O}_X(1)$ を、 $c_1(\mathcal{O}_X(1))=\omega$ となる
ample line bdl. としたとき、 $m \gg 0$ について、

$$H^0(E(m)) \otimes \mathcal{O}(-m) \longrightarrow E \quad (5.14)$$

がすべての $ch(E)=v$ なる ω-半安定層 E
に対して全射となる。

さらに、 $H^i(E(m)) = 0$ for $i > 0$.

V : $\dim V = \dim H^0(E(m))$ なる vec. sp.

$\mathcal{V} := V \otimes \mathcal{O}_X(-m)$ $\quad (= \mathcal{O}_X(-m)^{\oplus \dim V})$

さらに、反変函手

$$\mathrm{Quot}(\mathcal{V}, v) : (\mathrm{Sch}/\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Sets}$$

を、$T \in (\mathrm{Sch}/\mathbb{C})$ に対して次で定義:

$$\mathrm{Quot}(\mathcal{V}, v)(T) = \left\{ p_X^* \mathcal{V} \twoheadrightarrow \mathcal{F} \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X \times T) \text{ は } T \text{上平坦,} \\ \forall t \in T,\ \mathcal{F}_t \text{ は } \mathrm{ch}(\mathcal{F}_t) = v \end{array} \right\} \Big/ \cong$$

同型は次の可換図式で定まる.

$$\begin{tikzcd}
p_X^* \mathcal{V} \arrow[r] \arrow[dr, two heads] & \mathcal{F} \arrow[d, "\cong"] \\
& \mathcal{F}'
\end{tikzcd}$$

関手 $\mathrm{Quot}(\mathcal{V}, v)$ は Proj. scheme $\mathrm{Quot}(\mathcal{V}, v)$ によって表現される.

これを Quot スキーム と呼ぶ.

$$\mathcal{U} \subset \mathrm{Quot}(\mathcal{V}, v)$$
$$\text{\rotatebox{90}{=}}$$
$$\left\{ s : p_X^* \mathcal{V} \twoheadrightarrow \mathcal{F} \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathcal{F} \text{ は } \omega\text{-半安定}, \\ \underbrace{H^0(\mathcal{V}(m))}_{=V} \to H^0(\mathcal{F}(m)) \text{ が同型} \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{U}' \subset \mathrm{Quot}(\mathcal{V}, v)$$
$$\text{\rotatebox{90}{=}}$$
$$\left\{ s : p_X^* \mathcal{V} \twoheadrightarrow \mathcal{F} \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathcal{F} \text{ は } \omega\text{-安定}. \\ V = H^0(\mathcal{V}(m)) \longrightarrow H^0(\mathcal{F}(m)) \text{ が同型} \end{array} \right\}$$

とする. $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ は $\mathrm{Quot}(\mathcal{V}, v)$ の Zariski open.

E : $\mathrm{ch}(E) = v$ となる ω-半安定層 とする.

このとき, 同型 $V \cong H^0(E(m))$ を与えると,

$$H^0(E(m)) \otimes \mathcal{O}_X(-m) \twoheadrightarrow E \qquad (5.14)$$

が $\mathcal{U}$ の閉点を定める.

一方, このようにして定まる $\mathcal{U}$ の閉点は,
$V \cong H^0(E(m))$ のとり方 に依存. 自由度は,

$$G = GL(V).$$

G の $\mathrm{Quot}(\mathcal{V}, v)$ への作用を,
$g \in G$, $s : p_X^* \mathcal{V} \twoheadrightarrow \mathcal{F}$ に対し,

$$s \circ g : p_X^* \mathcal{V} \twoheadrightarrow \mathcal{F} \qquad (\mathcal{V} = V \otimes \mathcal{O}(-m))$$

で定める. すると,

$$\begin{cases} M_\omega(v) = \mathcal{U}/G \\ \overline{M}_\omega(v) = \mathcal{U}/\!/G. \end{cases}$$