第5章　安定層のモジュライ空間とFourier-Mukai変換

§5.1 代数曲線上の(半)安定ベクトル束

C : smooth projective algebraic curve.

$M := \{C$ 上の代数的ベクトル束全体$\}/\cong$

Q.

Mには「良い」幾何学的構造が入るか?

A.

「良い」を「有限型の代数的スキーム」とするとNo.

理由1

考えるベクトル束のrankとdegreeによって

Mには無限個の連結成分が存在する.

$\rightsquigarrow$ (r, d) をfixした $M(r,d) \subset M$ を考えれば

解決 ??

理由2

たとえば $C = \mathbb{P}^1$ のとき.

$$M(2,0) = \{ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a) \}_{a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}.$$

となり, M は 有限型 で なくなる.

困った!!

ここで, ベクトル束 E に対し. その slope

$$\mu(E) \in \mathbb{Q}$$

を,

$$\mu(E) := \frac{\deg(E)}{\mathrm{rank}(E)}$$

で 定める.

(2) の 例において. $E := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a)$ $(a \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$

は、すべて.
$$\mu(E) = \frac{0}{2} = 0.$$

しかし. $a > 0$ ならば, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \subset E$ かつ.

$$\mu(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)) = \frac{a}{1} = a > 0 = \mu(E).$$

Def 5.2

C : smooth projective algebraic curve.
E : C 上の algebraic vector bundle.

E は任意の部分束 $0 \subsetneq F \subsetneq E$ に対して、
不等式

$$\mu(F) \underset{(=)}{<} \mu(E)$$

を満たすとき、(半) 安定 ((semi) stable)
であるという。

先程の考察により、(2) において安定なものは
存在せず、半安定なものは、$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus 2}$ に限る。

問 5.4 (C : smooth proj. alg. curve)

(i) C 上の ベクトル束 E が (半) 安定

$\Longleftrightarrow$

任意の ベクトル束 の 全射 $E \twoheadrightarrow F$ に対して

$$\mu(E) \underset{(-)}{\leq} \mu(F)$$

(ii) E, F : C 上の 2つの 半安定 ベクトル束

について

「$\mu(E) > \mu(F)$」 $\Rightarrow$ 「$\mathrm{Hom}(E, F) = 0$」

∵

(i) E が (半)安定 として

$$0 \to K \to E \xrightarrow{q} F \to 0$$

を 考える ($K := \ker(q)$)

$K \subsetneq E$ より $\mu(K) \underset{(-)}{\leq} \mu(E)$ であり,

$$\mu(E) = \frac{rk(K)\mu(K) + rk(F)\mu(F)}{rk(E)}$$

だから.

$$\mu(E) = \frac{rk(K)}{rk(E)} \cdot \mu(K) + \frac{rk(F)}{rk(E)} \cdot \mu(F)$$

$$(\mu(K) \underset{(-)}{\leq} \mu(E)) \quad \underset{(-)}{<} \frac{rk(K)}{rk(E)} \cdot \mu(E) + \frac{rk(F)}{rk(E)} \cdot \mu(F)$$

$$\therefore \mu(F) \underset{(-)}{>} \frac{rk(E)}{rk(F)} \cdot \left(1 - \frac{rk(K)}{rk(E)}\right) \cdot \mu(E)$$

$$= \left(\frac{rk(E) - rk(K)}{rk(F)}\right) \cdot \mu(E)$$

$$= \mu(E).$$

(ii) 対偶 $Hom(E, F) \neq 0 \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(F)$

を示す.

$g : E \to F$ の像を I とおく.

$E \to I \to 0$ で (i) より $\mu(I) \geq \mu(E)$.

$I \subsetneq F$ のとき、F が半安定なので,

$\mu(F) \geq \mu(I)$ $\therefore$ $\mu(F) \geq \mu(E)$.

$I = F$ のとき. $g : E \to F$ は全射.

E は半安定なので. (i) より $\mu(E) \leq \mu(F)$

□

$M(r,d)$ の subset

$$M^s(r,d) \quad \left(M^{ss}(r,d)\right)$$

を、(半)安定ベクトル束からなるものとする。

(考えるベクトル束を減少させたことで、$M^s(r,d)$ と $M^{ss}(r,d)$ に「良い」幾何構造が入らないか期待する)

次の定理により、C 上の階数 r、次数 d のベクトル束に対し、フィルトレーションが存在し、半安定層に分解することができる。

さらに、半安定層は安定層に分解することができる。

つまり、$M^s(r,d)$、$M^{ss}(r,d)$ を考察することで、$M(r,d)$ が本質的に復元される

Thm 5.5

(i) C 上の任意のベクトル束 E に対してフィルトレーション

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_k = E \qquad (5.3)$$

が存在して、各 $F_i = E_i / E_{i-1}$ は半安定であり、

$$\mu(F_1) > \mu(F_2) > \cdots > \mu(F_k)$$

が成立する。

(5.3) は Harder-Narasimhan (HN) フィルトレーション と呼ばれ、各 F_i を E の Harder-Narasimhan (HN) 因子 と呼ぶ。

(ii) C 上の任意の半安定ベクトル束 F に対して、フィルトレーション

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_\ell = F \qquad (5.4)$$

が存在して、各 $G_i = F_i / F_{i-1}$ は安定であり、

$$\mu(G_1) = \mu(G_2) = \cdots = \mu(G_\ell) = \mu(F)$$

(5.4) を Jordan-Hölder (JH) フィルトレーション と呼び、各 G_i を F の Jordan-Hölder (JH) 因子 と呼ぶ。

[(i) の証明]　((ii) は Huybrechts-Lehn Prop 1.5.2)

Step 1 - Claim 1

C 上の任意のベクトル束 E は、

$$\mu(A) \geq \mu(E)$$

をみたす半安定ベクトル束 A を含む。
同様に、$\mu(E) \geq \mu(B)$ をみたす半安定ベクトル束 B
と、全射

$$E \twoheadrightarrow B$$

が存在する。

(?)　E : 半安定 なら $A = E$.

E : 半安定でないなら、E は、

$$\mu(E') > \mu(E)$$

となるベクトル束 E' を含む。
$E' \subsetneq E$ より $\mathrm{rk}(E') < \mathrm{rk}(E)$.

E' が 半安定 なら $A = E'$.

そうでないなら. 同じ議論を繰り返す.

line bdl は 安定なので. 帰納法により. 求めるAを得る.

(後半)

E が 半安定 なら $B = E$.

E が 半安定 でないなら. 同 5.4 (i) より.

ある 商ベクトル束 $E'' = E/E'$ で.

$$\mu(E'') \geqq \mu(E) \qquad (rk(E'') < rk(E))$$

となるものが存在.

E'' が 半安定 なら $B = E''$.

そうでないなら, 前半と同様の議論で求めるBを得る.

$\square$

Step 2

ベクトル束 E をとる.
ベクトル束 E の全射 $E \twoheadrightarrow B$ は,
次の条件をみたすとき E の mdq
(maximal destabilizing quotient) とよばれる.

(i) $\mu(E) \geq \mu(B)$

(ii) 任意の全射 $E \twoheadrightarrow B'$ に対して

$$\mu(B') \geq \mu(B)$$

さらに, $\mu(B') = \mu(B)$ ならば,

$$E \twoheadrightarrow B \twoheadrightarrow B'$$

と分解する.

Claim 2

C 上の任意のベクトル束 E は mdq を持つ.

∵

mdq の定義 (ii) より,

$$E \twoheadrightarrow B$$

が mdq なら B は半安定.

さらに、(Step 1) より、

$E \twoheadrightarrow B$ が mdq であることをチェックするには、
半安定な B' に対して条件をチェックすればよい。

もし E が半安定ならば、

$$\mathrm{id} : E \longrightarrow E$$

が mdq を与える。

E が半安定でなければ、ベクトル束の完全列

$$0 \to A \to E \to E' \to 0 \qquad (5.5)$$

で、A は半安定、かつ $\mu(A) > \mu(E)$
をみたすものが存在 (Step 1)。

$\mathrm{rk}(E) > \mathrm{rk}(E')$ であり、$\mathrm{rk}(E') = 1$ のとき、
つまり E' : line bdl のときは $E' \twoheadrightarrow E'$ が mdq。
E' が安定なので。

よって、$\mathrm{rk}(E')$ に関する帰納法により、
「$E' \twoheadrightarrow B$ が mdq ならば、合成

$$E \twoheadrightarrow E' \twoheadrightarrow B \text{ も mdq}$$
(5.6)」

を示せばよい。

そこで、半安定な B' と、全射 $E \twoheadrightarrow B'$ の存在を仮定する。

もし、$\mu(B') \leq \mu(B)$ なら、次の不等式を得る。

$$\mu(A) > \mu(E) > \mu(E') \geq \mu(B) \geq \mu(B')$$

A のとり方　　　仮定 ($E' \twoheadrightarrow B$ が mdq)　　　仮定。

よって、$0 \to A \to E \to E' \to 0$ と (命 5.4 (iii)) より、

$$E \twoheadrightarrow B' \text{ は、}$$
$$E \twoheadrightarrow E' \twoheadrightarrow B' \text{ と分解。}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[d] & E' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, "\exists"'] & 0 \\
& & B' \arrow[d] & B \arrow[l, "0"'] \arrow[d] & \\
& & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

しかし、 $E' \twoheadrightarrow B$ は mdq なので、

mdq の定義(ii) より、 $\mu(B') \geqq \mu(B)$

よって、 $\mu(B') = \mu(B)$

定義(ii)

このときは、 $E' \twoheadrightarrow B \twoheadrightarrow B'$ と分解するので、

分解

$$E \twoheadrightarrow B \twoheadrightarrow B'$$

が存在。

よって、合成 $E \twoheadrightarrow E' \twoheadrightarrow B \in$ mdq.

□

Step 3 - Claim 3

任意の C 上のベクトル束 E は HN フィルトレーションを持つ.

∵ $E \twoheadrightarrow B'$: mdq をとる.

mdq の定義より, B' は半安定.

完全列

$$0 \to E' \to E \to B' \to 0$$

をとる.

E' が半安定なら, これが E の HN-フィルトレーション.

∵ $0 = E_0 \subset E' \subset E$ で,

$$\mu(F_1) = \mu(E'/E_0) = \mu(E')$$

$$\mu(F_2) = \mu(E/E') = \mu(B')$$

$$\mu(F_1) = \mu(E') \underset{(B'\text{のとり方})}{>} \mu(E) \underset{(\text{mdq})}{\geq} \mu(B')$$

E^1 が半安定でなければ，

$$E^1 \twoheadrightarrow B^2 \quad \text{を mdq とし，}$$

再び完全列

$$0 \to E^2 \to E^1 \to B^2 \to 0$$

を得る．

$Q = E/E^2$ とすると，（$E \twoheadrightarrow Q$ に対し）

$E \twoheadrightarrow B^1$ が mdq なので，

$$\mu(Q) \geq \mu(B^1)$$

$$0 \to B^2 \to Q \to B^1 \to 0$$

より，

$$\mu(B^2) \geq \mu(Q)$$

もし，$\mu(B^2) = \mu(Q) = \mu(B^1)$ なら，

$E \twoheadrightarrow B^1$: mdq より，

$E \twoheadrightarrow B^1 \twoheadrightarrow Q$ と分解し，従って，

$$B^2 = 0, \quad B^1 \cong Q.$$

$(E \twoheadrightarrow E/E^1 \twoheadrightarrow E/E^2)$

$(B^2 = E^1/E^2)$

これは $0 \to E^2 \to E^1 \to B^2 \to 0$　$\mathrm{rk}(E^1) > \mathrm{rk}(E^2)$ に矛盾．

$$\therefore \quad \mu(B^2) > \mu(B^1)$$

$$\left(\mu(E^1/E^2) > \mu(E/E^1) \right)$$

以下、この操作を繰り返して得られる列

$$\cdots \subsetneq E^3 \subsetneq E^2 \subsetneq E^1 \subsetneq E$$

は $rk(E) > rk(E^1) > rk(E^2) > \cdots$

となるため無限につづくことはない。
よって、最後に、半安定なベクトル束 E^{k-1} を得る。

$E_i := E^{k-i}$ とおいて、求めるHNフィルトレーションを得る

□