

## 第5章 安定層のモジュライ空間と Fourier-Mukai 変換.

### § 5.1 代数曲線上の (半) 安定ベクトル束

$C$  : smooth projective algebraic curve.

$$M := \{ C \text{ 上の代数的ベクトル束全体} \} / \cong$$

Q.



$M$  には「良い」幾何学的構造があるか?

A.

「良い」は「有限型の代数的空間」ではない No.

理由 1

各々のベクトル束の rank と degree により

$M$  には無限個の連結成分が存在する。

~~~~~  $(r, d) \in \text{fix set } M(r, d) \subset M$  是否存在?  
解決??

理由 2

これでは  $C = \mathbb{P}^1$  のとき.

$$M(2, 0) = \left\{ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a) \right\}_{a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$$

と見れば,  $M$  は有限型  $\mathbb{Z}$  上  $C$  付き.

□,  $\tau_0$  !!

ここで,  $\mathbb{A}^1$  上の束  $E$  に対し, その slope

$$\mu(E) \in \mathbb{Q}$$

を,

$$\mu(E) := \frac{\deg(E)}{\operatorname{rank}(E)}$$

で定める.  $(\deg(E) = \deg(\Lambda^{\operatorname{rk}(E)} E))$

(2) の例)において,  $E := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a)$  ( $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ )

は, 明らか.

$$\mu(E) = \frac{0}{2} = 0.$$

しかし,  $a > 0$  ならば,  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \subset E$  かつ

$$\mu(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)) = \frac{a}{1} = a > 0 = \mu(E)$$

## Def 5.2

$C$  : smooth projective algebraic curve.

$E$  :  $C$  上の algebraic vector bundle.

$E$  は 任意の部分束  $0 \subsetneq F \subsetneq E$  に対して、  
不等式

$$\mu(F) \leq \mu(E)$$

を 満たすとき、(半)安定 (semi) stable  
であるという。

先程の考察により、(2) において安定なものは  
存在せず、半安定なものも  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus 2}$  に 限る。

(b) 5.4 (C : smooth proj. alg. curve)

(i) C 上の 1 つの束 E が (半) 安定

$\Leftrightarrow$

任意の 1 つの束の射 E  $\rightarrow$  F に対して.

$$\mu(E) \leq \mu(F)$$

(ii) E, F : C 上の 2 つの (半) 安定 1 つの束

に対して.

$$\mu(E) > \mu(F) \Rightarrow \text{Hom}(E, F) = 0$$

(\*)

(i) E が (半) 安定 である.

$$0 \rightarrow K \rightarrow E \xrightarrow{\varphi} F \rightarrow 0$$

E を射影 (K := Ker( $\varphi$ ))

$$K \subsetneq E \text{ かつ } \mu(K) \leq \mu(E) \text{ である.}$$

$$\mu(E) = \frac{\text{rk}(K)\mu(K) + \text{rk}(F)\mu(F)}{\text{rk}(E)}$$

これは.

$$\text{deg}(E) = \underbrace{\text{deg}(K)}_{\text{rk}(K) \cdot \mu(K)} + \text{deg}(F)$$

$$\mu(E) = \frac{\text{rk}(K)}{\text{rk}(E)} \cdot \mu(K) + \frac{\text{rk}(F)}{\text{rk}(E)} \cdot \mu(F)$$

$$(\mu(K) \leq \mu(E)) \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \frac{\text{rk}(K)}{\text{rk}(E)} \cdot \mu(E) + \frac{\text{rk}(F)}{\text{rk}(E)} \cdot \mu(F)$$

$$\therefore \mu(F) \geq \frac{\text{rk}(E)}{\text{rk}(F)} \cdot \left(1 - \frac{\text{rk}(K)}{\text{rk}(E)}\right) \cdot \mu(E)$$

$$= \left(\frac{\text{rk}(E) - \text{rk}(K)}{\text{rk}(F)}\right) \cdot \mu(E)$$

$$= \mu(E).$$

(ii) 対偶  $\text{Hom}(E, F) \neq 0 \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(F)$   
を示す.

$\varphi: E \rightarrow F$  の像  $I \subset F$  をとる.

$E \rightarrow I \rightarrow 0$  として (i) より  $\mu(I) \geq \mu(E)$ .

$I \subsetneq F$  のとき、 $F$  は半安定なので、

$\mu(F) \geq \mu(I)$  したがって  $\mu(F) \geq \mu(E)$ .

$I = F$  のとき、 $\varphi: E \rightarrow F$  は全射.

$E$  は半安定なので、(i) より  $\mu(E) \leq \mu(F)$

$M(r, d)$  の subset

$$M^s(r, d) \quad (M^{ss}(r, d))$$

ε. (半)安定 ベクトル束 から成るものとす。

( 与えられたベクトル束を減少させたことで、 $M^s(r, d)$  と  $M^{ss}(r, d)$  に  
「良い」幾何構造が与えられるか期待する )

次の定理により、 $\mathbb{C}$  上の階数  $r$ 、次数  $d$  の  
ベクトル束に対し、フルトレーションが存在し、  
半安定層に分解することができる。

さらに、半安定層は安定層に分解することができる。

つまり、 $M^r(r, d)$ 、 $M^s(r, d)$  を考察することで、

$M(r, d)$  が本質的に復元された。

## Thm 5.5

(i)  $C$  上の任意の  $\mathbb{A}^1$  束  $E$  に対して フィルトレーション

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_k = E \quad (5.3)$$

が存在して、各  $F_i = E_i/E_{i-1}$  は半安定であり、

$$\mu(F_1) > \mu(F_2) > \dots > \mu(F_k)$$

が成立する。

(5.3) は Harder - Narasimhan (HN) フィルトレーション と呼ばれる。各  $F_i$  を  $E$  の Harder - Narasimhan (HN) 因子 と呼ぶ。

(ii)  $C$  上の任意の半安定  $\mathbb{A}^1$  束  $F$  に対して、  
フィルトレーション

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_\ell = F \quad (5.4)$$

が存在して、各  $G_i = F_i/F_{i-1}$  は安定であり、

$$\mu(G_1) = \mu(G_2) = \dots = \mu(G_\ell) = \mu(F)$$

(5.4) を Jordan - Hölder (JH) フィルトレーション と呼ぶ。

各  $G_i$  を  $F$  の Jordan - Hölder (JH) 因子 と呼ぶ。

[(i) の証明] (ii) は Huybrechts - Lehn Prop 1.5.2)

Step 1 - Claim 1

$C$  上の任意のベクトル束  $E$  は.

$$\mu(A) \geq \mu(E)$$

を許す半安定ベクトル束  $A$  を含む.

同様に.  $\mu(E) \geq \mu(B)$  を許す半安定ベクトル束  $B$

を. 全射

$$E \longrightarrow B$$

が存在する.

①  $E$  : 半安定ならば  $A = E$ .

$E$  : 半安定でないならば.  $E$  は.

$$\mu(E') > \mu(E)$$

を許すベクトル束  $E'$  を含む.

$$E' \subsetneq E \text{ ならば } \mu(E') < \mu(E).$$

$E'$  が半安定ならば  $A = E'$ .

そうでないならば、(ii) のステップを繰り返す。

line  $bd$  は安定なので、帰納法により、求める  $A$  を得る。

(後半)

$E$  が半安定ならば  $B = E$ .

$E$  が半安定でないならば、同 5.4 (i) より、

ある商  $E'$  に対して  $E'' = E/E'$  である。

$$\mu(E'') \geq \mu(E) \quad (\text{rk}(E'') < \text{rk}(E))$$

と矛盾が生じる。

$E''$  が半安定ならば  $B = E''$ .

そうでないならば、前半と同様のステップで求める  $B$  を得る。

□

## Step 2

$\wedge$  射束  $E$  を与え.

$\wedge$  射束  $E$  の全射  $E \rightarrow B$  は.

次の条件を満たす  $E$  の mdq  
(maximal destabilizing quotient) とよばれる.

(i)  $\mu(E) \geq \mu(B)$

(ii) 任意の全射  $E \rightarrow B'$  に対し.

$$\mu(B') \geq \mu(B)$$

さらに,  $\mu(B') = \mu(B)$  ならば.

$$E \rightarrow B \rightarrow B'$$

と分解する.

## Claim 2

$C$  上の任意の  $\wedge$  射束  $E$  は mdq を持つ.

①

mdq の定義 (ii) より,

$$E \rightarrow B$$

が mdq ならば  $B$  は半安定.

さらに, (Step 1) より.

$E \rightarrow B$  が  $\text{mdg}$  であることより  $\mu(E) > \mu(B)$  となる.

半安定な  $B'$  に対して条件を  $\mu(E) > \mu(B')$  とすればよい.

もし  $E$  が半安定ならば,

$$\text{id} : E \rightarrow E$$

が  $\text{mdg}$  を与える.

$E$  が半安定であることは、ベクトル束の完全列

$$0 \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow E' \rightarrow 0 \quad (5.5)$$

より  $A$  は半安定. かつ  $\mu(A) > \mu(E)$

と矛盾が生じる (Step 1).

$\text{rk}(E) > \text{rk}(E')$  であり,  $\text{rk}(E') = 1$  のとき,

つまり  $E' : \text{line bundle}$  のときは  $E' \rightarrow E'$  が  $\text{mdg}$  である.   
  $E'$  が安定なため.

よって,  $\text{rk}(E')$  に関する帰納法により.

$E' \rightarrow B$  が  $\text{mdg}$  ならば, 合成

$$E \rightarrow E' \rightarrow B \quad \text{が } \text{mdg} \quad \text{よ} \quad (5.6)$$

を示せばよい.

そこで、半安定な  $B'$  と、全射  $E \rightarrow B'$  の存在を仮定する。

もし、 $\mu(B') \leq \mu(B)$  ならば、次の不等式を得る。

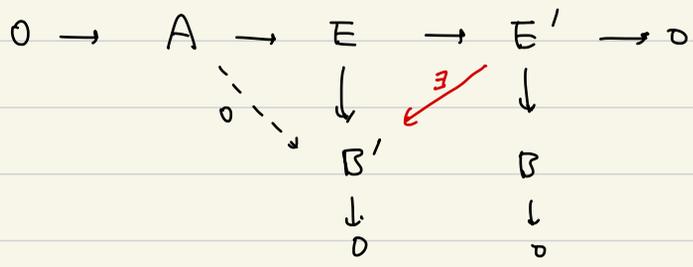
$$\mu(A) > \mu(E) > \mu(E') \geq \mu(B) \geq \mu(B')$$

$\uparrow$ 
 $\uparrow$ 
仮定
仮定.

$A \rightarrow$  の右
( $E' \rightarrow B'$  の右)

すなわち、 $0 \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow E' \rightarrow 0$  と (向. 5.4 (ii) #)

$E \rightarrow B'$  は、  
 $E \rightarrow E' \rightarrow B'$  と分解。



しかし、 $E' \rightarrow B$  は  $\text{mdg}$  なのぞ。

$\text{mdg}$  の定義 (ii) より、 $\mu(B') \geq \mu(B)$

よって、
$$\mu(B') = \mu(B)$$

定義 (ii)

このときは、 $E' \rightarrow B \rightarrow B'$  と分解するのぞ。

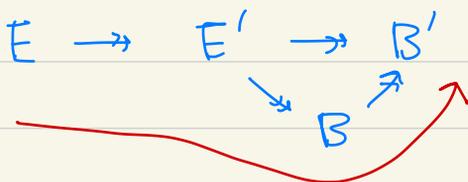
分解

$$E \rightarrow B \rightarrow B'$$

が存在。

よって、合成  $E \rightarrow E' \rightarrow B \in \text{mdg}$  .

□



$$(5.6) \quad E \rightarrow E' \rightarrow B \quad (E \rightarrow B)$$

$$\rightsquigarrow E \rightarrow B \rightarrow B'$$

### Step 3 - Claim 3

任意の  $C$  上のベクトル束  $E$  は HN-分解を持つ。

$$\textcircled{1} \quad E \longrightarrow B' \quad : \text{mdq} \quad \text{exists.}$$

mdq の定義より,  $B'$  は 半安定.

完全性)

$$0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow B' \rightarrow 0$$

exists.

$E'$  が 半安定 なら, これより  $E$  の HN-分解.

$$\left( \begin{array}{l} \textcircled{2} \quad 0 = E_0 \subset E' \subset E \quad \text{exists.} \\ \mu(F_1) = \mu(E'/E_0) = \mu(E') \\ \mu(F_2) = \mu(E/E') = \mu(B') \\ \mu(F_1) = \mu(E') \underset{\text{(B' is stable)}}{>} \mu(E) \underset{\text{(mdq)}}{\geq} \mu(B') = \mu(F_2) \end{array} \right)$$

$E^1$  が半安定でないことは、

$$E^1 \rightarrow B^2 \quad \varepsilon \text{ mod } q \quad \text{と} \quad \varepsilon \in \mathcal{L}.$$

再び完全列

$$0 \rightarrow E^2 \rightarrow E^1 \rightarrow B^2 \rightarrow 0$$

を得る。

$$Q = E/E^2 \quad \text{と} \quad \varepsilon \in \mathcal{L}. \quad (E \rightarrow Q \text{ に対し})$$

$$E \rightarrow B^1 \quad \mu \text{ mod } q \quad \text{に対して}$$

$$\mu(Q) \geq \mu(B^1)$$

$$0 \rightarrow B^2 \rightarrow Q \rightarrow B^1 \rightarrow 0$$

$$\text{F)}. \quad \begin{matrix} & E^1/E^2 & E/E^2 & E/E^1 \end{matrix}$$

$$\mu(B^2) \geq \mu(Q)$$

$$\text{と} \quad \mu(B^2) = \mu(Q) = \mu(B^1) \quad \text{から}$$

$$E \rightarrow B^1 \quad : \quad \text{mod } q \quad \text{F)}.$$

$$E \rightarrow B^1 \rightarrow Q \quad \text{と} \quad \text{分解} \quad \mathcal{L}. \quad \text{従って}$$

$$B^2 = 0, \quad B^1 \cong Q. \quad \begin{matrix} (E \rightarrow E/E^1 \rightarrow E/E^2) \\ (B^2 = E^1/E^2) \end{matrix}$$

$$\text{したがって} \quad 0 \rightarrow E^2 \rightarrow E^1 \rightarrow B^2 \rightarrow 0 \quad \text{rk}(E^1) > \text{rk}(E^2) \quad \text{に} \quad \text{矛盾}.$$

$$\therefore \mu(B^2) > \mu(B')$$

$$(\mu(E'/E^2) > \mu(E/E'))$$

以下、この操作を繰り返して得る系列

$$\dots \subset E^3 \subset E^2 \subset E' \subset E$$

$$\# \text{rk}(E) > \text{rk}(E') > \text{rk}(E^2) > \dots$$

となるため、無限に続くことはない。

よって、最後に、半安定なベクトル束  $E^{k-1}$  を得る。

$E_i := E^{k-i}$  において、求める HN フィルトレーションを得る

□