§4.6 半直交分解 および 例外列の変異

$\mathcal{D}$: $\mathbb{C}$-linear な tri. cat.

$\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$: admissible sub cat.

(Prop 4.31) より $\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}^{\perp}, \mathcal{C} \rangle = \langle \mathcal{C}, {}^{\perp}\mathcal{C} \rangle$

$\mathcal{C}^{\perp} = \{ E \in \mathcal{D} \mid {}^{\forall}F \in \mathcal{C},\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F, E) = 0 \}$

${}^{\perp}\mathcal{C} = \{ E \in \mathcal{D} \mid {}^{\forall}F \in \mathcal{C},\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E, F) = 0 \}$

Lem 4.58

$\mathcal{C}$ 上で 0 射になる三角函手

$$\begin{cases} R_{\mathcal{C}} : \mathcal{D} \to \mathcal{D} \\ L_{\mathcal{C}} : \mathcal{D} \to \mathcal{D} \end{cases}$$

が存在して、互いに逆函手となる同値

$$\mathcal{C}^{\perp} \longrightarrow {}^{\perp}\mathcal{C}$$

$${}^{\perp}\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\perp}$$

を誘導する.

$\because$

i^{R}, i^{L} を、それぞれ埋め込み

$$i : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{D}$$

の右随伴, 左随伴 とする.

$$F \to i \circ i^L(F) \to \underset{\sim\sim}{R_C(F)} \xrightarrow{+1}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "i"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend right, "i^L"'] \arrow[l, bend left, "i^R"] \end{tikzcd}$$

$F \in \mathcal{D}$ に対して, $R_{\mathcal{C}}(F)$, $L_{\mathcal{C}}(F)$ を,

$$\begin{cases} R_{\mathcal{C}}(F) := \mathrm{Cone}(F \to i \circ i^L(F)) \\ L_{\mathcal{C}}(F) := \mathrm{Cone}(i \circ i^R(F) \to F)[-1] \end{cases}$$

と定める. (Prop 4.31) の証明から,

$$\begin{cases} R_{\mathcal{C}}(F) \in {}^{\perp}\mathcal{C} \\ L_{\mathcal{C}}(F) \in \mathcal{C}^{\perp} \end{cases}.$$

(古 2.15) より. $R_C(-)$, $L_C(-)$ は関手的.

ex. $F \xrightarrow{f} G$ に対して.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d, "f"] & i \circ i^L(F) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists! g"] & R_C(F) \arrow[d, dashed, "\exists! h"] \\ G \arrow[r] & i \circ i^L(G) \arrow[r] & R_C(G) \end{tikzcd}$$

$$\left(\because \begin{cases} \mathrm{Hom}(\underset{{}^{\perp}C}{R_C(F)[-1]}, \underset{\mathcal{C}}{i \circ i^L(G)}) = 0. \\ \mathrm{Hom}(R_C(F)[-1], i \circ i^L(G)[-1]) = 0. \end{cases} \right)$$

$F \in {}^{\perp}\mathcal{C}$ に対して、

$$R_{\mathcal{C}} \circ L_{\mathcal{C}}(F) \simeq F$$

を示す。

$L_{\mathcal{C}}, R_{\mathcal{C}}$ の定義から次の図式を得る：

$$\begin{tikzcd}
{}^{\perp}\mathcal{C} \ni R_{\mathcal{C}} \circ L_{\mathcal{C}}(F)[-1] \arrow[d] \arrow[dr, dashed, "0射"] & & \mathrm{Cone}(u) \\
L_{\mathcal{C}}(F) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\in$} \\ \mathcal{C}}}{i \circ i^{R}(F)} \arrow[r] \arrow[ur] & F \\
i \circ i^{L} \circ L_{\mathcal{C}}(F) \arrow[ur, "\exists u"'] & &
\end{tikzcd}$$

八面体公理より dist. tri.

$$R_{\mathcal{C}} \circ L_{\mathcal{C}}(F) \to F \to \mathrm{Cone}(u)$$

を得る。

$$\left(\because \begin{cases} L_{\mathcal{C}}(F) \to i \circ i^{L} \circ L_{\mathcal{C}}(F) \to R_{\mathcal{C}} \circ L_{\mathcal{C}}(F) \\ i \circ i^{L} \circ L_{\mathcal{C}}(F) \to i \circ i^{R}(F) \to \mathrm{Cone}(u) \\ L_{\mathcal{C}}(F) \to i \circ i^{R}(F) \to F \end{cases} \text{の3つから。} \right)$$

$F \in {}^{\perp}\mathcal{C}$, $\mathrm{Cone}(u) \in \mathcal{C}$ より

$F \to \mathrm{Cone}(u)$ は 0射.

従って,

$$R_{\mathcal{C}} \circ L_{\mathcal{C}}(F) \to F \to \mathrm{Cone}(u) \quad \in \Delta \text{ より}$$

$$R_{\mathcal{C}} \circ \underset{\substack{\uparrow \\ {}^{\perp}\mathcal{C}}}{L_{\mathcal{C}}(F)} \cong \underset{\substack{\uparrow \\ {}^{\perp}\mathcal{C}}}{F} \oplus \mathrm{Cone}(u)[-1].$$

を得る.

$R_{\mathcal{C}} \circ L_{\mathcal{C}}(F) \in {}^{\perp}\mathcal{C}$ なので,

$\mathrm{Cone}(u)[-1] = 0$. $(\because \mathrm{Cone}(u) \in \mathcal{C})$

$\therefore$ $\mathrm{Cone}(u) = 0$.

$\therefore$ $R_{\mathcal{C}} \circ L_{\mathcal{C}}(F) \cong F$.

同様にして, $L_{\mathcal{C}} \circ R_{\mathcal{C}}(G) \cong G$ $(G \in \mathcal{C}^{\perp})$

□

Def

$R_{\mathcal{C}}$ を $\mathcal{C}$ による右変異函手 (right mutation functor)

$L_{\mathcal{C}}$ を $\mathcal{C}$ による左変異函手 (left mutation functor)

と呼ぶ.

Cor 4.59

$\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \cdots, \mathcal{C}_m \rangle$: SOD of $\mathcal{D}$

各 $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{D}$ が admissible subcategory

このとき,

$1 \leq k \leq m-1$ に対して. 次の SOD が存在する.

$$\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_{k-1}, \underline{\mathcal{C}_{k+1}, R_{\mathcal{C}_{k+1}}(\mathcal{C}_k)}, \mathcal{C}_{k+2}, \cdots, \mathcal{C}_m \rangle$$

$$\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_{k-1}, \underline{L_{\mathcal{C}_k}(\mathcal{C}_{k+1}), \mathcal{C}_k}, \mathcal{C}_{k+2}, \cdots, \mathcal{C}_m \rangle$$

∵ $\mathcal{C}_k$, $\mathcal{C}_{k+1}$ は それぞれ. $\langle \mathcal{C}_k, \mathcal{C}_{k+1} \rangle$ の admissible sub.

$$\langle \mathcal{C}_k, \mathcal{C}_{k+1} \rangle \simeq \langle \mathcal{C}_{k+1}, R_{\mathcal{C}_{k+1}}(\mathcal{C}_k) \rangle$$
$$\langle \mathcal{C}_k, \mathcal{C}_{k+1} \rangle \simeq \langle L_{\mathcal{C}_k}(\mathcal{C}_{k+1}), \mathcal{C}_k \rangle$$

□

Rem 4.60

$L_{\mathcal{C}_k}(\mathcal{C}_{k+1})$, や $R_{\mathcal{C}_{k+1}}(\mathcal{C}_k)$ が $\mathcal{D}$ の admissible sub になるかは 分からない.

$\mathcal{D}$ が. smooth proj. alg. var. X の $D^b(X)$ なら

(Cor 4.33) より. これらも admissible sub.

Lem 4.61

(Cor 4.59) の状況下で, $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}_k, \mathcal{C}_{k+1}) = 0$ とすると,

$$\begin{cases} L_{\mathcal{C}_k}(\mathcal{C}_{k+1}) = \mathcal{C}_{k+1} \\ R_{\mathcal{C}_{k+1}}(\mathcal{C}_k) = \mathcal{C}_k \end{cases}$$

よって SOD (4.13) (4.14) は単に次のような SOD の入れ替えとなる.

$$\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{k-1}, \mathcal{C}_{k+1}, \mathcal{C}_k, \mathcal{C}_{k+2}, \dots, \mathcal{C}_m \rangle$$

(∵)

$$\begin{array}{cccc} R_{\mathcal{C}_{k+1}} : & \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ & \cup & & \cup \\ & \mathcal{C}_{k+1}^{\perp} & \longrightarrow & {}^{\perp}\mathcal{C}_{k+1} \end{array}$$

$F \in \mathcal{C}_k \subset \mathcal{C}_{k+1}^{\perp}$ とする. $\quad i : \mathcal{C}_{k+1} \to \mathcal{D}$.

$R_{\mathcal{C}_{k+1}}(F) := \mathrm{Cone}(F \to i \circ i^L(F))$ より

$$\underset{\in\,\mathcal{C}_k}{F} \xrightarrow[0]{} \underset{\in\,\mathcal{C}_{k+1}}{i \circ i^L(F)} \longrightarrow R_{\mathcal{C}_{k+1}}(F) \xrightarrow{\sim} F[1] \xrightarrow{0}$$

$\mathrm{Hom}(\mathcal{C}_k, \mathcal{C}_{k+1}) = 0$, $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}_{k+1}, \mathcal{C}_k) = 0$. より

$R_{\mathcal{C}_{k+1}}(F) \simeq F[1] \quad \therefore R_{\mathcal{C}_{k+1}}(\mathcal{C}_k) \simeq \mathcal{C}_k$. □

Lem 4.62

$\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \rangle$: SOD

$S_{\mathcal{D}}$: $\mathcal{D}$ の Serre 函手

とすると、次が成立：

$$\begin{cases} R_{\mathcal{C}_2}(\mathcal{C}_1) = S_{\mathcal{D}}^{-1}(\mathcal{C}_1) \\ L_{\mathcal{C}_1}(\mathcal{C}_2) = S_{\mathcal{D}}(\mathcal{C}_2) \end{cases}$$

(証)

$$L_{\mathcal{C}_1}(\mathcal{C}_2) = \mathcal{C}_1^{\perp} = \mathcal{C}_2^{\perp\perp} \quad (\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2^{\perp})$$

Serre 函手の性質から、

$$\begin{cases} S_{\mathcal{D}}(\mathcal{C}_2) \subset \mathcal{C}_2^{\perp\perp} \\ S_{\mathcal{D}}^{-1}(\mathcal{C}_2^{\perp\perp}) \subset {}^{\perp}(\mathcal{C}_2^{\perp}) \end{cases}$$

$$\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E, F) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F, S_{\mathcal{D}}(E))^{\vee} \right).$$

(問 4.32 (iii)) より. ${}^{\perp}(\mathcal{C}_2^{\perp}) = \mathcal{C}_2$

$$\therefore \quad \mathcal{C}_2^{\perp\perp} \subset S_{\mathcal{D}}(\mathcal{C}_2) \subset \mathcal{C}_2^{\perp\perp}$$

$$\therefore \quad S_{\mathcal{D}}(\mathcal{C}_2) = \mathcal{C}_2^{\perp\perp} = L_{\mathcal{C}_1}(\mathcal{C}_2)$$

□

exceptional collection

例外列と右(左)変異函手

$\mathcal{D}$: $\mathbb{C}$-linear な tri. cat.

s.t. 有限型

$$\left({}^{\forall} E_1, E_2 \in \mathcal{D}, \quad \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E_1, E_2) \in D^b(\mathrm{Vect}(\mathbb{C})) \quad \sum_i \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E_1, E_2[i]) < \infty \right)$$

(E, F) : $\mathcal{D}$ の 例外列 (exceptional collection)

(生成列かどうかは分からない)

$\langle E \rangle$, $\langle F \rangle$: $\mathcal{D}$ の admissible sub.

それぞれについて定まる函手

$$R_{\langle E \rangle} \quad , \quad L_{\langle F \rangle}$$

を考える.

まず, $R_F E$, $L_E F$ を次の exact tri で定める

$$\begin{cases} E \xrightarrow{\mathrm{coev}} \mathbb{R}\mathrm{Hom}(E, F)^{\vee} \otimes_{\mathbb{C}} F \to R_F E & (4.15) \\ L_E F \to \mathbb{R}\mathrm{Hom}(E, F) \otimes_{\mathbb{C}} E \xrightarrow{\mathrm{ev}} F & (4.16) \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
E \xrightarrow{\mathrm{coev}} \mathbb{R}\mathrm{Hom}(E,F)^{\vee} \otimes_{\mathbb{C}} F \to R_F E & (4.15) \\
L_E F \to \mathbb{R}\mathrm{Hom}(E,F) \otimes_{\mathbb{C}} E \xrightarrow{\mathrm{ev}} F & (4.16)
\end{cases}
$$

次の図式を考える：

$$
\begin{tikzcd}
i \circ i^R(F) \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & L_{\langle E \rangle}(F)[1] \\
\mathbb{R}\mathrm{Hom}(E,F) \otimes E \arrow[r] & F \arrow[r] & L_E F[1]
\end{tikzcd}
$$

ここで、 $\langle E \rangle \underset{i^R}{\overset{i}{\rightleftarrows}} D$ （$\perp$） $L_E F \in \langle E \rangle^{\perp}$ より

$$
\mathrm{Hom}_D(\underset{\in \langle E \rangle}{i \circ i^R(F)}, \underset{\in \langle E \rangle^{\perp}}{L_E F}) = \mathrm{Hom}_D(i \circ i^R(F), L_E F[1]) = 0.
$$

∴ （問 2.15）より

$$
\begin{cases}
\exists!\, f : i \circ i^R(F) \to \mathbb{R}\mathrm{Hom}(E,F) \otimes E. \\
\exists!\, h : L_{\langle E \rangle}(F) \to L_E F
\end{cases}
$$

s.t. 図式が可換.

逆方向も同様に得られ、 f, h は同型 .

$\therefore \quad L_{\langle E \rangle}(F) \cong L_E F \in \langle E \rangle^{\perp}$

同様に. $\quad R_F E \cong R_{\langle F \rangle}(E) \in {}^{\perp}\langle F \rangle$.

次に、

$$E \xrightarrow{\mathrm{coev}} \mathbb{R}\mathrm{Hom}(E,F)^{\vee} \otimes F \to R_F E$$

に $\mathrm{Hom}(-,E)$ を施して.

$$\mathrm{Hom}(R_F E, E) \to \mathrm{Hom}(\underbrace{\mathbb{R}\mathrm{Hom}(E,F)^{\vee} \otimes F}_{\in \langle F \rangle}, E)^{=0} \to \mathrm{Hom}(E,E)$$

を得る. $\quad \mathbb{R}\mathrm{Hom}(E,F)^{\vee} \otimes F \in \langle F \rangle$ で,

(E, F) が $\mathcal{D}$ の例外列だから,

$\mathbb{R}\mathrm{Hom}(F,E) = 0$.

$\therefore \quad \mathrm{Hom}(\mathbb{R}\mathrm{Hom}(E,F)^{\vee} \otimes F, E) = 0$.

$\therefore \quad \mathbb{R}\mathrm{Hom}(R_F E, E) \cong \mathbb{R}\mathrm{Hom}(E[1], E)$

$\cong \mathbb{C}[-1]$. $\quad$ (E : exceptional)

次に、

$$E \xrightarrow{\mathrm{coev}} \mathbb{R}\mathrm{Hom}(E,F)^\vee \otimes F \to R_F E$$

に、 $\mathrm{Hom}(R_F E, -)$ を施すと、

$$\begin{aligned}\underset{\cong\ \mathbb{C}[-1]}{\mathrm{Hom}(R_F E, E)} \to \mathrm{Hom}(\underset{\in {}^\perp\langle F\rangle}{R_F E}, \underset{\in\langle F\rangle}{\mathbb{R}\mathrm{Hom}(E,F)^\vee \otimes F})^{\cong 0} \\ \to \mathrm{Hom}(R_F E, R_F E)\end{aligned}$$

$$R_F E \in {}^\perp\langle F\rangle, \quad \mathbb{R}\mathrm{Hom}(E,F)^\vee \otimes F \in \langle F\rangle$$

より、 (cf. Rem 2.5')

$$\mathrm{Hom}(R_F E, \mathbb{R}\mathrm{Hom}(E,F)^\vee \otimes F) = 0.$$

$$\therefore \quad \mathbb{R}\mathrm{Hom}(R_F E, R_F E) \cong \mathbb{C}$$

つまり、 $R_F E$ は 例外対象 (exceptional object).

(同様に、 $L_E F$ も exceptional object).

そこで、新たな exceptional collection

$$(F, R_F E), \quad (L_E F, E)$$

が存在して、

$$\langle E, F\rangle = \langle F, R_F E\rangle = \langle L_E F, E\rangle.$$

Def

$R_F E$ を、E の F による右変異 (right mutation)
$L_E F$ を、F の E による左変異 (left mutation)
とよぶ.

Cor (P.98)

与えられた D の例外(生成)列
$$\sigma = (E_1, \dots, E_m)$$
$$1 \le k \le m-1$$
に対し、
$$\begin{cases} R_k \sigma := (E_1, \dots, E_{k-1}, E_{k+1}, R_{E_{k+1}} E_k, E_{k+2}, \dots, E_m) \\ L_k \sigma := (E_1, \dots, E_{k-1}, L_{E_k} E_{k+1}, E_k, E_{k+2}, \dots, E_m) \end{cases}$$
も例外(生成)列

Thm 4.63

(Q, ρ) : 順序付き関係式付き箙.

$Q_0 := \{1, \cdots, m\}$

$A := kQ/I$; 道代数.

このとき、$(S(1), S(2), \cdots, S(m))$ は

$D^b(\text{mod-}A)$ の例外生成列になる.

また、$(P(m), P(m-1), \cdots, P(1))$ は強例外生成列

∵

(例 4.40) で見たように、

$$\sigma = (P(m), P(m-1), \cdots, P(1))$$

は強例外列

i.e., $$\mathrm{Hom}^k(P(i), P(j)) = \begin{cases} e_j A e_i & (k=0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$

一方、[Bon '89 Lem 5.6] より、

$$L_1 (L_1 L_2)(L_1 L_2 L_3) \cdots (L_1 \cdots L_{m-1}) \sigma$$

$$= (L_{P(m)} L_{P(m-1)} \cdots L_{P(2)} P(1),\ L_{P(m)} L_{P(m-1)} \cdots L_{P(3)} P(2),\ \cdots,\ P(m))$$

$$= (S(1)[-m+1],\ S(2)[-m+2],\ \cdots,\ S(m-1)[-1],\ S(m))$$

また, mod-A の単純対象は $S(i)$ たちのみ. (Lem B.4)
かつ,

$$\text{mod-}A = \langle S(1), S(2), \cdots, S(m) \rangle_{ex}$$

($\langle - \rangle_{ex}$ は extension closure).

だから, exceptional collection $(S(1), \cdots, S(m))$ は
full exceptional collection (例外生成列)

従って,

$$\sigma = (\cdots)^{-1} (S(1)[-m+1], S(2)[-m+2], \cdots, S(m))$$

で, σ は強例外生成列. □

(例 4.64 (Jordan-Hölder 性を持たない導来圏))

Prop 4.65 (Bon '89)

$\mathcal{D}$ の例外列

$$\sigma = (E_1, \cdots, E_m)$$

に対し.

$$R_i L_i \sigma = L_i R_i = \sigma$$

が成り立つ

また. $|i-j|>1$ なる i,j に対しては.

$$L_i L_j \sigma = L_j L_i \sigma.$$

さらに.

$$\begin{cases} R_i R_{i+1} R_i = R_{i+1} R_i R_{i+1} \\ L_i L_{i+1} L_i = L_{i+1} L_i L_{i+1} \end{cases}$$

特に. $\mathcal{D}$ の例外生成列全体の集合 $\mathcal{F}$ には.
m 本の組み紐からなる組み紐群 B_m が作用する.

$$\begin{array}{ccccc} & & i & i+1 & i+2 & & \end{array}$$

$$R_i \sigma = (E_1, \cdots, E_{i-1}, E_{i+1}, R_{E_{i+1}} E_i, E_{i+2}, \cdots, E_m)$$

$$R_{i+1} R_i \sigma = (E_1, \cdots, E_{i-1}, E_{i+1}, E_{i+2}, R_{E_{i+2}}(R_{E_{i+1}} E_i), \cdots, E_m)$$

$$R_i R_{i+1} R_i \sigma = (E_1, \cdots, E_{i-1}, E_{i+2}, R_{E_{i+2}} E_{i+1}, R_{E_{i+2}}(R_{E_{i+1}} E_i), \cdots, E_m).$$

同様に.

$$R_{i+1} R_i R_{i+1} \sigma = (E_1, \cdots, E_{i-1}, E_{i+2}, R_{E_{i+2}} E_{i+1}, R_{R_{E_{i+2}} E_{i+1}} R_{E_{i+2}} E_i, \cdots, E_m)$$

$\mathbb{Z}^m$ の標準基底を $\{e_i\}$ とし、

$$\sigma = (E_1, \ldots, E_i, \ldots, E_m)$$

に対し、

$$e_i\sigma := (E_1, \ldots, E_{i-1}, E_i[1], E_{i+1}, \ldots, E_m)$$

と定めると、$\mathbb{Z}^m$ は $\mathcal{E}$ (例外生成列全体の集合) に作用する.

定義から、

$$\begin{cases} L_E(F[1]) = (L_E F)[1] \\ L_{E[1]} F = L_E F \end{cases}$$

?

$$\left(\begin{array}{ccccc}
L_E(F[1]) & \to & \mathbb{R}\mathrm{Hom}(E, F[1]) \otimes_{\mathbb{C}} E & \xrightarrow{ev} & F[1] \\
\| & & \| & & \| \\
(L_E F)[1] & \to & \mathbb{R}\mathrm{Hom}(E, F) \otimes_{\mathbb{C}} E[1] & \to & F[1] \\
 & & & & \\
L_{E[1]} F & \to & \mathbb{R}\mathrm{Hom}(E[1], F) \otimes_{\mathbb{C}} E[1] & \xrightarrow{ev} & F \\
\| & & \| & & \| \\
L_E F & \to & \mathbb{R}\mathrm{Hom}(E, F) \otimes_{\mathbb{C}} E & \to & F
\end{array}\right)$$

よって、

$$\begin{cases} L_i e_i R_i = e_{i+1} \\ L_i e_{i+1} R_i = e_i \\ L_i e_j R_i = e_j & (j \neq i, i+1) \end{cases}$$

これで定まる半直積

$$G_m := \mathbb{Z}^m \rtimes B_m$$

Conj 4.66 (Bondal - Polishchuk)

$\mathcal{D}$: 長さ m の例外生成列を持つ $\mathbb{C}$-linear tri.cat.

$\mathcal{C}^{\mathrm{fn}}$: $\mathcal{D}$ の例外生成列の同型類全体のなす集合.

このとき、$G_m \curvearrowright \mathcal{C}^{\mathrm{fn}}$ への作用は推移的.

X : del Pezzo surface のとき、

$D^b(X)$ には例外生成列が存在し、

さらに (Conj 4.66) は正しい.

一般に smooth proj. alg. var X に対し.

$$\mathrm{rk}\, K(X) \geq \dim X + 1.$$

$\mathbb{P}^n$, 奇数次元の2次超曲面などでは

$$\mathrm{rk}\, K(X) = \dim X + 1. \qquad (4.17)$$

Thm 4.67 (Bondal - Positseki)

X : smooth proj. alg. var.
s.t. (4.17) をみたす.

群 G_m の集合 $\mathcal{C}^{\mathcal{F}}$ への作用を考える.

(i) $\sigma = (E_1, \cdots, E_m) \in \mathcal{C}^{\mathcal{F}}$ に対し.
各 E_i が連接層のときは.
$\forall g \in B_m$, $g\sigma$ も連接層からなる

(ii) $\sigma = (E_1, \cdots, E_m) \in \mathcal{C}^{\mathcal{F}}$ に対し. 次は同値.
(i) $\exists n \in \mathbb{Z}$ s.t. 各 $E_i[n]$ は局所自由層.
(ii) $\exists n \in \mathbb{Z}$ s.t. 各 $E_i[n]$ は連接層.
(iii) σ が強例外生成列となる.