

§ 4.6 半直交分解 および 例外列の変異

$\mathcal{D}$: $\mathbb{C}$ -linear tr , cat .

$\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$: admissible sub cat.

(Prop 4.31) より $\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}^\perp, \mathcal{C} \rangle = \langle \mathcal{C}, {}^\perp \mathcal{C} \rangle$.

lem 4.58

$\mathcal{C}$ 上 $\mathbb{C}$ の射になる三角関手

$$\begin{cases} R_{\mathcal{C}} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} \\ L_{\mathcal{C}} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} \end{cases}$$

$R_{\mathcal{C}}$ 存在して、互いに逆関手となる同値.

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^\perp &\longrightarrow {}^\perp \mathcal{C} \\ {}^\perp \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{C}^\perp \end{aligned}$$

を誘導する.

②

i^R, i^L を、それぞれ埋め込め

$$i : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{D}$$

の右随伴, 左随伴 とする.

$$\begin{array}{ccc}
 & i^L & \\
 & \leftarrow \perp & \\
 C & \xrightarrow{i} & D \\
 & \perp & \\
 & \xleftarrow{i^R} &
 \end{array}$$

$F \in D$ に対して, $R_C(F), L_C(F) \in$.

$$\begin{cases} R_C(F) := \text{Cone}(F \rightarrow i \circ i^L(F)) \\ L_C(F) := \text{Cone}(i \circ i^R(F) \rightarrow F)[-1] \end{cases}$$

と定義する. (Prop 4.31) の #0 は AS.

$$\begin{cases} R_C(F) \in {}^\perp C \\ L_C(F) \in C^\perp \end{cases}$$

(命 2.15) より, $R_C(-), L_C(-)$ は可換的.

ex. $F \xrightarrow{f} G$ に対して.

$$\begin{array}{ccccc}
 F & \rightarrow & i \circ i^L(F) & \rightarrow & R_C(F) \\
 \downarrow f & & \downarrow \exists! s & & \downarrow \exists! h \\
 G & \rightarrow & i \circ i^L(G) & \rightarrow & R_C(G)
 \end{array}$$

$$\left(\begin{cases} \text{Hom}(R_C(F)[-1], i \circ i^L(G)) = 0 \\ \text{Hom}(R_C(F)[-1], i \circ i^L(G)[-1]) = 0 \end{cases} \right)$$

$F \in {}^\perp C$ に対して.

$$R_C \circ L_C(F) \simeq F$$

を示す.

L_C, R_C の定義より次の図式を得る:

$$\begin{array}{ccccc}
 {}^\perp C \ni R_C \circ L_C(F)[-1] & & & & \text{Cone}(u) \\
 \downarrow & \searrow \text{0射} & & \nearrow & \\
 L_C(F) & \longrightarrow & \text{coi}^R(F) & \longrightarrow & F \\
 \downarrow & \swarrow \text{G} & \nearrow \text{exists } u & \nwarrow \text{red } C & \\
 \text{coi}^L \circ L_C(F) & & & &
 \end{array}$$

八面体公理より, dist. tri.

$$R_C \circ L_C(F) \rightarrow F \rightarrow \text{Cone}(u)$$

を得る.

$$\left(\begin{array}{l}
 \textcircled{1} \quad \left\{ \begin{array}{l}
 L_C(F) \rightarrow \text{coi}^L \circ L_C(F) \rightarrow R_C \circ L_C(F) \\
 \text{coi}^L \circ L_C(F) \rightarrow \text{coi}^R(F) \rightarrow \text{Cone}(u) \\
 L_C(F) \rightarrow \text{coi}^R(F) \rightarrow F
 \end{array} \right.
 \end{array} \right)$$

の3つから.

$$F \in {}^\perp \mathcal{C}, \quad \text{Cone}(u) \in \mathcal{C} \text{ ではない.}$$

$$F \rightarrow \text{Cone}(u) \quad \text{は } 0 \text{ 射.}$$

従って,

$$R_{\mathcal{C}} \circ L_{\mathcal{C}}(F) \rightarrow F \rightarrow \text{Cone}(u) \quad \in \Delta \text{ ではない}$$

$$R_{\mathcal{C}} \circ L_{\mathcal{C}}(F) \cong F \oplus \text{Cone}(u)[-1].$$

を得る.

$$R_{\mathcal{C}} \circ L_{\mathcal{C}}(F) \in {}^\perp \mathcal{C} \quad \text{if } \alpha \in \mathcal{C}.$$

$$\text{Cone}(u)[-1] = 0, \quad (\because \text{Cone}(u) \in \mathcal{C})$$

$$\therefore \text{Cone}(u) = 0.$$

$$\therefore R_{\mathcal{C}} \circ L_{\mathcal{C}}(F) \cong F.$$

$$\text{同様に.} \quad L_{\mathcal{C}} \circ R_{\mathcal{C}}(G) \cong G \quad (G \in \mathcal{C}^\perp)$$

□

Def

$R_{\mathcal{C}} \in \mathcal{C}$ に対する 右変異函手 (right mutation functor)

$L_{\mathcal{C}} \in \mathcal{C}$ に対する 左変異函手 (left mutation functor)

と書く.

Cor 4.59

$D = \langle \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_m \rangle$: SOD of D

各 $\mathcal{C}_i \subset D$ は admissible subcategory

にあて.

$1 \leq k \leq m-1$ に対して, 次の SOD は存在する.

$$D = \langle \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{k-1}, \underline{\mathcal{C}_{k+1}, R_{\mathcal{C}_{k+1}}(\mathcal{C}_k)}, \mathcal{C}_{k+2}, \dots, \mathcal{C}_m \rangle$$

$$D = \langle \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{k-1}, \underline{L_{\mathcal{C}_k}(\mathcal{C}_{k+1})}, \mathcal{C}_k, \mathcal{C}_{k+2}, \dots, \mathcal{C}_m \rangle$$

① $\mathcal{C}_k, \mathcal{C}_{k+1}$ は Σ -perp. $\langle \mathcal{C}_k, \mathcal{C}_{k+1} \rangle$ の admissible sub.

$$\langle \mathcal{C}_k, \mathcal{C}_{k+1} \rangle \simeq \langle \mathcal{C}_{k+1}, R_{\mathcal{C}_{k+1}}(\mathcal{C}_k) \rangle$$

$$\langle \mathcal{C}_k, \mathcal{C}_{k+1} \rangle \simeq \langle L_{\mathcal{C}_k}(\mathcal{C}_{k+1}), \mathcal{C}_k \rangle$$

□

Rem 4.60

$L_{\mathcal{C}_k}(\mathcal{C}_{k+1})$ と $R_{\mathcal{C}_{k+1}}(\mathcal{C}_k)$ は D の admissible sub
に閉じた Σ -perp. pair である.

D は smooth proj. alg. var. X の $D^b(X)$ として

(Cor 4.33) より $L_{\mathcal{C}_k}(\mathcal{C}_{k+1})$ は admissible sub.

Lem 4.11

(Cor 4.59) の状況下で. $\text{Hom}(C_k, C_{k+1}) = 0$ である.

$$\begin{cases} L_{C_k}(C_{k+1}) = C_{k+1} \\ R_{C_{k+1}}(C_k) = C_k \end{cases}$$

よて. SOD (4.13) (4.14) は 単に. 次の形式.

SOD の λ 代替えである.

$$D = \langle C_1, \dots, C_{k-1}, \underline{C_{k+1}, C_k, C_{k+2}}, \dots, C_m \rangle$$

④

$$\begin{array}{ccc} R_{C_{k+1}} : D & \longrightarrow & D \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_{k+1}^\perp & \longrightarrow & {}^\perp C_{k+1} \end{array}$$

$$F \in C_k \subset C_{k+1}^\perp \text{ である. } i : C_{k+1} \rightarrow D.$$

$$R_{C_{k+1}}(F) := \text{Cone}(F \rightarrow i \circ i^\perp(F)) \quad \text{d!}$$

$$F \rightarrow i \circ i^\perp(F) \rightarrow R_{C_{k+1}}(F) \rightarrow F[1]$$

$$\text{Hom}(C_k, C_{k+1}) = 0, \text{Hom}(C_{k+1}, C_k) = 0. \quad \text{d!}$$

$$R_{C_{k+1}}(F) \simeq F[1] \quad \therefore R_{C_{k+1}}(C_k) \simeq C_k. \quad 0$$

Lem 4.62

$$D = \langle C_1, C_2 \rangle \quad ; \quad \text{SOD}$$

N_D : D の Serre 函手

とすると、次の成立:

$$\begin{cases} R_{C_2}(C_1) = N_D^{-1}(C_1) \\ L_{C_1}(C_2) = N_D(C_2) \end{cases}$$

②

$$L_{C_1}(C_2) = C_1^\perp = C_2^{\perp\perp} \quad (C_1 \subset C_2^\perp)$$

Serre 函手の性質から、

$$\begin{cases} N_D(C_2) \subset C_2^{\perp\perp} \\ N_D^{-1}(C_2^{\perp\perp}) \subset {}^\perp(C_2^\perp) \end{cases}$$

$$(\text{Hom}_D(E, F) \cong \text{Hom}_D(F, N_D(E))^\vee)$$

$$(\text{例 } 4.32 (ii)) \text{ より } {}^\perp(C_2^\perp) = C_2$$

$$\therefore C_2^{\perp\perp} \subset N_D(C_2) \subset C_2^{\perp\perp}$$

$$\therefore N_D(C_2) = C_2^{\perp\perp} = L_{C_1}(C_2)$$

□

例外列と右(左)変異函手

$\mathcal{D}$: $\mathbb{C}$ -linear tri. cat.
s.t. 有限型

$$\left(\begin{array}{l} {}^\vee E_1, E_2 \in \mathcal{D}, \quad \mathrm{RHom}_{\mathcal{D}}(E_1, E_2) \in \mathcal{D}^b(\mathrm{Vect}(\mathbb{C})) \\ \sum_i \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E_1, E_2[i]) < \infty \end{array} \right)$$

(E, F) : $\mathcal{D}$ の例外列 (exceptional collection)
(生成列の一種ではない)

$\langle E \rangle, \langle F \rangle$: $\mathcal{D}$ の admissible sub.

それらについて定義する

$$R_{\langle E \rangle}, \quad L_{\langle F \rangle}$$

を考へる.

まず, $R_{\langle E \rangle}, L_{\langle F \rangle}$ を次の exact tri. で定義する

$$\left\{ \begin{array}{l} E \xrightarrow{\mathrm{coev}} \mathrm{RHom}(E, F)^\vee \otimes_{\mathbb{C}} F \rightarrow R_{\langle E \rangle} E \end{array} \right. \quad (4.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{\langle F \rangle} F \rightarrow \mathrm{RHom}(E, F) \otimes_{\mathbb{C}} E \xrightarrow{\mathrm{ev}} F \end{array} \right. \quad (4.16)$$

$$\begin{cases} E \xrightarrow{\text{coev}} \mathbb{R}\text{Hom}(E, F)^\vee \otimes_{\mathbb{C}} F \rightarrow R_F E & (4.15) \\ L_E F \rightarrow \mathbb{R}\text{Hom}(E, F) \otimes_{\mathbb{C}} E \xrightarrow{\text{ev}} F & (4.16) \end{cases}$$

次の図式を考える:

$$i \circ i^R(F) \rightarrow F \rightarrow L_{\langle E \rangle}(F)[1]$$

$$\downarrow \text{id}$$

$$\mathbb{R}\text{Hom}(E, F) \otimes E \rightarrow F \rightarrow L_E F[1]$$

$$\text{よって, } \langle E \rangle \begin{array}{c} \xrightarrow{i} \\ \perp \\ \xleftarrow{i^R} \end{array} D \quad L_E F \in \langle E \rangle^\perp \text{ 也.}$$

$$\begin{aligned} \text{Hom}_D(i \circ i^R(F), L_E F) &= \text{Hom}_D(i \circ i^R(F), L_E F[1]) \\ &= 0. \end{aligned}$$

∴ (10.2.15) 也.

$$\begin{cases} \exists! f : i \circ i^R(F) \rightarrow \mathbb{R}\text{Hom}(E, F) \otimes E \\ \exists! h : L_{\langle E \rangle}(F) \rightarrow L_E F \end{cases}$$

s.t. 図式 all 可換.

逆方向も同様にして得る. f, h は同型.

$$\begin{aligned} \therefore L_{\langle E \rangle}(F) &\cong L_E F \in \langle E \rangle^\perp \\ \text{同様に. } R_F E &\cong R_{\langle F \rangle}(E) \in {}^\perp \langle F \rangle. \end{aligned}$$

次に、

$$E \xrightarrow{\omega_E^\vee} R\mathrm{Hom}(E, F)^\vee \otimes F \rightarrow R_F E$$

に $\mathrm{Hom}(-, E)$ を施す。

$$\mathrm{Hom}(R_F E, E) \rightarrow \mathrm{Hom}(R\mathrm{Hom}(E, F)^\vee \otimes F, E) \rightarrow \mathrm{Hom}(E, E)$$

を得る。 $R\mathrm{Hom}(E, F)^\vee \otimes F \in \langle F \rangle^\perp$ 。

(E, F) は D の例外列だから、

$$R\mathrm{Hom}(F, E) = 0.$$

$$\therefore \mathrm{Hom}(R\mathrm{Hom}(E, F)^\vee \otimes F, E) = 0.$$

$$\begin{aligned} \therefore R\mathrm{Hom}(R_F E, E) &\cong R\mathrm{Hom}(E[-1], E) \\ &\cong \mathbb{C}[-1]. \end{aligned}$$

次に.

$$E \xrightarrow{\text{beve}} \mathbb{R} \text{Hom}(E, F)^\vee \otimes F \rightarrow R_F E$$

に. $\text{Hom}(R_F E, -)$ は射影的.

$$\begin{aligned} \text{Hom}(R_F E, E) &\rightarrow \text{Hom}(R_F E, \mathbb{R} \text{Hom}(E, F)^\vee \otimes F) \\ &\cong \mathbb{C}[-1] \qquad \qquad \qquad \rightarrow \text{Hom}(R_F E, R_F E) \end{aligned}$$

$$R_F E \in {}^\perp \langle F \rangle, \quad \mathbb{R} \text{Hom}(E, F)^\vee \otimes F \in \langle F \rangle$$

2).

$$\text{Hom}(R_F E, \mathbb{R} \text{Hom}(E, F)^\vee \otimes F) = 0.$$

$$\therefore \mathbb{R} \text{Hom}(R_F E, R_F E) \cong \mathbb{C}$$

つまり. $R_F E$ は 例外対象 (exceptional object).

(同様に, $L_E F \in \text{exceptional object}$).

よって. 新しい例外対象 exceptional collection.

$$(F, R_F E), \quad (L_E F, E)$$

が存在する.

$$\langle E, F \rangle = \langle F, R_F E \rangle = \langle L_E F, E \rangle.$$

Def

$R_F E$ ε . E の F による 右変異 (right mutation)

$L_E F$ ε . F の E による 左変異 (left mutation)

とよぶ。

Cor

与えられた D の例外 (生成) 列

$$\sigma = (E_1, \dots, E_m)$$

$$1 \leq k \leq m-1$$

に對し、

$$\begin{cases} R_k \sigma := (E_1, \dots, E_{k-1}, E_{k+1}, R_{E_{k+1}} E_k, E_{k+2}, \dots, E_m) \\ L_k \sigma := (E_1, \dots, E_{k-1}, L_{E_k} E_{k+1}, E_k, E_{k+2}, \dots, E_m) \end{cases}$$

は 例外 (生成) 列

Thm 4.63

(Q, ρ) : 順序付き関係式付き集合.

$$Q_0 := \{1, \dots, m\}$$

$$A := kQ/I \quad ; \quad \text{道代数.}$$

このとき, $(\rho(1), \rho(2), \dots, \rho(m))$ は

$D^b(\text{mod-}A)$ の例外 生成列 に属する.

また, $(P(m), P(m-1), \dots, P(1))$ は 強例外生成列

②

(例 4.40) 2" 見ておきに.

$$\sigma = (P(m), P(m-1), \dots, P(1))$$

は 強例外列

$$\text{i.e.,} \quad \text{Hom}^k(P(i), P(j)) = \begin{cases} e_j A e_i & (k=0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$

- 1. [Bon '89 Lem 5.6] より,

$$\begin{aligned} & L_1(L_1 L_2)(L_1 L_2 L_3) \dots (L_1 \dots L_{m-1}) \sigma \\ &= (L_{P(m)} L_{P(m-1)} \dots L_{P(2)} P(1), L_{P(m)} L_{P(m-1)} \dots L_{P(3)} P(2) \\ & \quad , \dots, P(m)) \end{aligned}$$

$$= (\rho(1)[-m+1], \rho(2)[-m+2], \dots, \rho(m-1)[-1], \rho(m))$$

特に, $\text{mod-}A$ の単純対象は $S(i)$ たちの $\mathcal{A}$ (Lem B.4) か。

$$\text{mod-}A = \langle S(1), S(2), \dots, S(m) \rangle_{\text{ex}}$$

($\langle - \rangle_{\text{ex}}$ は extension closure).

だから, exceptional collection $(S(1), \dots, S(m))$ は full exceptional collection (例外生成列)

従って,

$$\sigma = (\dots)^{-1} (S(1)[-m+1], S(2)[-m+2], \dots, S(m))$$

で, σ は 強例外生成列.

(例 4.64 (Jordan-Hölder 性を持つ可換環))

Prop 4.65 (Bon '89)

$\mathcal{D}$ の例外列

$$\sigma = (E_1, \dots, E_m)$$

に対し.

$$R_i L_i \sigma = L_i R_i = \sigma$$

が成り立つ.

また, $|i-j| > 1$ なる i, j に対しては.

$$L_i L_j \sigma = L_j L_i \sigma.$$

さらに.

$$\begin{cases} R_i R_{i+1} R_i = R_{i+1} R_i R_{i+1} \\ L_i L_{i+1} L_i = L_{i+1} L_i L_{i+1} \end{cases}$$

特に, $\mathcal{D}$ の例外生成列全体の集合 $\mathcal{F}$ には.

m 本の組紐系 $B_1, \dots, B_m$ からなる組紐系 B_m が作用する.

$$R_i \sigma = (E_1, \dots, E_{i-1}, E_{i+1}, R_{E_{i+1}} E_i, E_{i+2}, \dots, E_m)$$

$$R_{i+1} R_i \sigma = (E_1, \dots, E_{i-1}, E_{i+1}, E_{i+2}, R_{E_{i+2}} (R_{E_{i+1}} E_i), \dots, E_m)$$

$$R_i R_{i+1} R_i \sigma = (E_1, \dots, E_{i-1}, E_{i+2}, R_{E_{i+2}} E_{i+1}, R_{E_{i+2}} (R_{E_{i+1}} E_i), \dots, E_m).$$