§4.4 例外生成列を持つ代数多様体

X : projective alg. var.

strong exceptional collection

$D^b(X)$ が 強例外生成列 $(E_1, \cdots, E_m)$ を持つとき.

$A := \mathrm{End}(\bigoplus_i E_i)$ とおくと.

$$\Phi := \mathbf{R}\mathrm{Hom}_X(\bigoplus_i E_i, -) : D^b(X) \to D^b(\mathrm{mod}\text{-}A).$$

は. $\mathbb{C}$-linear な tri. cat の同値を与える. (Prop 4.53)

さらに. 有限次元代数 A は 基本代数. (付録 B)

ある箙 $Q = (Q_0, Q_1)$ の道代数 (path algebra) $\mathbb{C}Q$ を

ある許容イデアルで割ったものと同型.

[$Q = (Q_0, Q_1)$ の与え方]

$Q_0 = \{1, 2, \cdots, m\}$ とおく.

頂点 i に対応する A のべき等元を e_i とすると.

頂点 i から j への道は. ベクトル空間

$$e_i A e_j$$

の元とみなせる.

$$\left(\Phi(E_i) = \mathbb{R}\mathrm{Hom}_X(\Psi_j E_j, E_i) \right)$$

一方, $\Phi(E_i) = e_i A$. で.

$$e_i A e_j = \mathrm{Hom}_A(e_i A, e_j A) = \mathrm{Hom}_X(E_i, E_j).$$

そこで. $i<j$ に対し、写像の合成によって定まる
自然な写像

$$\phi_{ij} : \prod_{\substack{k \\ i<k<j}} \mathrm{Hom}(E_i, E_k) \times \mathrm{Hom}(E_k, E_j) \to \mathrm{Hom}(E_i, E_j)$$

を考え. $\mathrm{Hom}(E_i, E_j) / \mathrm{Im}\, \phi_{ij}$ の基底を1つ決め.

それに. $i \longrightarrow j \quad (\in Q_1)$ を1つ対応させる.

Hirzebruch surface.

[具体例) $(\mathbb{P}^n, \Sigma_e)$]

<u>Thm 4.45 (Beilinson '78)</u>

$D^b(\mathbb{P}^n)$ には、strong exceptional collection

$$(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1), \dots, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n))$$

が存在する。

$$\left(\mathrm{Hom}^k_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(j), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(i)) = H^k(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(i-j)) = 0 \right)$$

$k \neq 0$, $|i-j| \leq n$

<u>Lem 4.46</u>

$f : X \to Y$: Noether スキーム間の射影射

s.t. すべてのファイバーの次元が n 以下。

さらに、

Y : Affine

$\mathcal{L}$: X 上の ample line bundle で

大域切断で生成されているもの

とする。

このとき、$\bigoplus_{i=0}^{n} \mathcal{L}^{-i}$ は $D^-(X)$ を生成する。

$\mathcal{L}$ によって、有限射

$$X \longrightarrow \mathbb{P}^n_Y \quad (:= \mathbb{P}^N \times Y)$$

が得られる。

$N+1$ 変数の多項式環の Koszul 複体を考えて、

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N_Y}(-N-1) \to \cdots \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N_Y}(-k)^{\oplus\binom{N+1}{k}}$$

$$\to \cdots \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N_Y}(-1)^{\oplus(N+1)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N_Y} \to 0.$$

これを X 上に引き戻すと、

$$0 \to \mathcal{L}^{-N-1} \to \cdots \to (\mathcal{L}^{-k})^{\oplus\binom{N+1}{k}} \to \cdots \to \mathcal{O}_X \to 0.$$

また、K を

$$K := \mathrm{Ker}\left((\mathcal{L}^{-n-1})^{\oplus\binom{N+1}{n+1}} \longrightarrow (\mathcal{L}^{-n})^{\oplus\binom{N+1}{n}}\right)$$

とすると、(命 2.41) より、$\mathrm{Ext}^{n+1}_X(\mathcal{O}_X, K)$ の元として、

$$0 \to K \to (\mathcal{L}^{-n-1})^{\oplus\binom{N+1}{n+1}} \to (\mathcal{L}^{-n})^{\oplus\binom{N+1}{n}} \to \cdots \to (\mathcal{L}^{-1})^{\oplus(N+1)} \to 0$$

を得る。

一方, ファイバー次元の仮定より. $\mathrm{Ext}^{n+1}_X(\mathcal{O}_x, K)=0$.

base change thm ?

(命 2.41 (iv)) より $\mathcal{O}_x$ は $D^b(X)$ の対象として複体

$$\cdots \to 0 \to (\mathcal{L}^{-n-1})^{\oplus\binom{N+1}{n+1}} \to \cdots \to (\mathcal{L}^{-1})^{\oplus(N+1)} \to 0 \to \cdots$$

の直和因子.

この複体の双対をとって, $j\geq 0$ に対し. induction で

$\mathcal{L}^{-n-j-1}$ は $D^b(X)$ の対象として複体

$$\cdots \to 0 \to (\mathcal{L}^{-n-j})^{\oplus(N+1)} \to \cdots \to (\mathcal{L}^{-j})^{\oplus\binom{N+1}{n+1}} \to 0 \to \cdots$$

の直和因子.

つまり $D^-(X)$ の充満部分三角圏

$\langle \mathcal{L}^{-i}\rangle_{0\leq i\leq n}$ は. $\mathcal{L}^{-j}$ を含む.

$E \in D^-(X)$ に対し.

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}\left(\bigoplus_{i=0}^{n} \mathcal{L}^{-i}, E\right)=0$$

が成り立つとき. 任意の $j\geq 0$ に対しても.

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}(\mathcal{L}^{-j}, E)=0.$$

が言えた.

ここで E をシフトして,

$$E \in D(X)^{\leq 0}$$

とする.

$j \gg 0$, $-n \leq i \leq 0$ なる i に対し.

$$\mathbb{R}\Gamma(X, \mathcal{H}^i(E) \otimes \mathcal{L}^j) = \Gamma(X, \mathcal{H}^i(E) \otimes \mathcal{L}^j)$$

が成立. ($\because$ $\mathcal{L}$ が ample).

また. ファイバーの次元に関する仮定より

$$\mathbb{R}\Gamma(X, \tau_{\leq -n-1}(E \otimes \mathcal{L}^j)) \in D(\mathrm{Vect}(\mathbb{C}))^{<0}.$$

ここで dist. tri.

$$\mathbb{R}\Gamma(X, \tau_{\leq -n-1}(E \otimes \mathcal{L}^j)) \to \mathbb{R}\Gamma(X, E \otimes \mathcal{L}^j)$$
$$\to \mathbb{R}\Gamma(X, \tau_{>-n-1}(E \otimes \mathcal{L}^j))$$

を考えると.

$$0 = \mathbb{R}^0\Gamma(X, E \otimes \mathcal{L}^j) \cong \mathbb{R}^0\Gamma(X, \tau_{>-n-1}(E \otimes \mathcal{L}^j))$$
$$\cong \Gamma(X, \mathcal{H}^0(E) \otimes \mathcal{L}^j)$$

$j \gg 0$ だったから $\mathcal{H}^0(E) = 0$.

$\therefore \quad E \in D(X)^{\leq -1}$.

これを繰り返して. $E \cong 0$.

$\square$

(

<u>Rem</u>

Ω が D を生成する.

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \langle \Omega \rangle^{\perp} = 0$. $\quad ({}^{\perp}\langle \Omega \rangle = 0)$

$E \in {}^{\perp}\langle \bigoplus_{i=0}^{n} L^{-i} \rangle$ として. $E \cong 0$ を示した

)

例 4.47 [$\mathbb{P}^3$ の場合]

有限次元代数を

$$A := \mathrm{End}_{\mathbb{P}^3}\left(\bigoplus_{i=0}^{3} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(i)\right)$$

と定めると、(Prop 4.53) より

$$\Phi(-) := \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{P}^3}\left(\bigoplus_{i=0}^{3} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(i), -\right) : D^b(X) \to D^b(\mathrm{mod}\text{-}A)$$

は同値.

ここで $A = \mathrm{End}_{\mathbb{P}^3}\left(\bigoplus_{i=0}^{3} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(i)\right)$ は、次の箙

$Q = (Q_0, Q_1)$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, shift left=4.5, "x_0"] \arrow[r, shift left=1.5, "x_1"] \arrow[r, shift right=1.5, "x_2"] \arrow[r, shift right=4.5, "x_3"] & 1 \arrow[r, shift left=4.5, "x_0"] \arrow[r, shift left=1.5, "x_1"] \arrow[r, shift right=1.5, "x_2"] \arrow[r, shift right=4.5, "x_3"] & 2 \arrow[r, shift left=4.5, "x_0"] \arrow[r, shift left=1.5, "x_1"] \arrow[r, shift right=1.5, "x_2"] \arrow[r, shift right=4.5, "x_3"] & 3
\end{tikzcd}$$

の道代数の許容イデアルによる商 $\mathbb{C}Q/I$ と同型.

頂点 i の元に対応するべき等元を e_i とおくと、
mod-A の射影加群 $P(i)$ は、

$$P(i) = e_i A = \mathrm{Hom}\left(\bigoplus_{j=0}^{3} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(j), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(i)\right)$$

頂点 i から頂点 $i+1$ への矢印、 $\overset{i}{\bullet} \longrightarrow \overset{i+1}{\bullet}$
つまり Q_1 の元は、(4.8) より

$$\begin{aligned} e_i A e_j &\cong H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)) \\ &\cong \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]_1. \end{aligned}$$

の基底 $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ の各元に対応する。

この場合、写像 (4.9) は、

$$\phi_{ij} : \prod_{k : i<k<j} \mathrm{Hom}(E_i, E_k) \times \mathrm{Hom}(E_k, E_j) \longrightarrow \mathrm{Hom}(E_i, E_j)$$

$j - i \geq 2$ のとき ϕ_{ij} は全射。

(cf. $\mathcal{O}$ から $\mathcal{O}(2)$ への矢印はない)。

$\mathrm{Hom}(E_i, E_j) / \mathrm{Im}\,\phi_{ij}$ の基底で Q_1 の元が決まる。

関係式は.

$$x_k x_j' - x_j x_k' \qquad (j, k = 0, 1, 2, 3)$$

これらが生成する ideal が I.

$$\begin{cases} S(0) = \Phi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}) \\ S(1) = \Phi(\Omega_{\mathbb{P}^3}(1)[1]) \\ S(2) = \Phi(\Omega^2_{\mathbb{P}^3}(2)[2]) \\ S(3) = \Phi(\Omega^3_{\mathbb{P}^3}(3)[3]) \end{cases}$$

[Hirzebruch surface の場合]

$$\Sigma_e := \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-e)) \qquad (e \geq 0)$$

を考える.

Σ_e の derived cat. $D^b(\Sigma_e)$ も.
次のような強例外生成列を持つ;

$$D^b(\Sigma_e) = \langle \mathcal{O}_{\Sigma_e}, \mathcal{O}_{\Sigma_e}(F), \mathcal{O}_{\Sigma_e}(C_0 + eF), \mathcal{O}_{\Sigma_e}(C_0 + (e+1)F) \rangle.$$

$$(C_0^2 = -e)$$