§4.3 例外生成列

($\mathcal{D}$: $\mathbb{C}$-linear な tri. cat.)

Def 4.35 (例外対象)

$\mathcal{D}$ の対象 E が

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}(E, E) = \mathbb{C}$$

をみたす. つまり,

$$\mathrm{Hom}^i_{\mathcal{D}}(E, E) = \begin{cases} \mathbb{C} & (i = 0) \\ 0 & (i \neq 0) \end{cases}$$

をみたすとき. E を 例外対象 (exceptional object) とよぶ.

例外対象 $E \in D^b(X)$ と. 自己同値 $\Phi \in \mathrm{Auteq}(D^b(X))$ に対し. $\Phi(E)$ も 例外対象 となる.

$$\left(\because \quad \mathbb{R}\mathrm{Hom}(\Phi(E), \Phi(E)) = \mathbb{R}\mathrm{Hom}(E, E) = \mathbb{C} \right)$$

例外対象があれば、SOD が得られることを見る。

問 4.37

E を $\mathcal{D}$ の例外対象とすると、函手

$$- \otimes_{\mathbb{C}} E \ : \ D^b(\mathrm{Spec}(\mathbb{C})) \longrightarrow \mathcal{D}$$

は充満忠実となり、その本質的像は $\langle E \rangle$ となる。

㊟

$$\mathcal{F}, \mathcal{G} \in D^b(\mathrm{Spec}(\mathbb{C})) \qquad (D^b(\mathrm{Vect}(\mathbb{C})))$$

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{F} \otimes E, \mathcal{G} \otimes E)$$

$$\left(\begin{array}{l} \cong (\mathcal{G} \otimes E) \otimes (\mathcal{F} \otimes E)^{\vee} \\ \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \otimes \mathrm{Hom}(E, E) \end{array} \right)$$

Def

任意の対象 $E_1, E_2 \in Ob(D)$ に対し

$$\mathbb{R}Hom_D(E_1, E_2) \in D^b(Vect(\mathbb{C}))$$

がみたされる。つまり

$$\sum_i \dim_{\mathbb{C}} Hom_D(E_1, E_2[i]) < \infty$$

が成り立つとき、D は有限型 (of finite type)

であるとよばれる。

X : smooth projective variety

のとき、$D^b(X)$ は有限型。

Lem 4.38

D が有限型であると仮定。

$E \in Ob(D)$ を例外対象とすると、

$\langle E \rangle$ は D の許容部分三角圏

(admissible sub-category)

∵

D の exceptional object E が与えられたとき、
任意の対象 F に対し、次のような exact tri を考える。

$$G \to F \xrightarrow{\mathrm{coev}} \mathbb{R}\mathrm{Hom}(F,E)^{\vee} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{C}} E \longrightarrow G[1]$$

$$\left(G := \mathrm{Cone}(\mathrm{coev})[-1] \right) \qquad (\text{P.48})$$

このとき、この exact tri. に コホモロジー的関手
$$\mathrm{Hom}(-,E) : D^{op} \longrightarrow \mathrm{Vect}(\mathbb{C})$$
を施すと、（E が exceptional なので）$k \in \mathbb{Z}$ に対し、

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{Hom}^k(\mathbb{R}\mathrm{Hom}(F,E)^{\vee} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{C}} E, E) \\
\cong\ & \mathrm{Hom}^k(E, E \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{C}} \mathbb{R}\mathrm{Hom}(F,E)) \\
\cong\ & \mathrm{Hom}(E, E \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}^k(F,E)) \\
\cong\ & \mathrm{Hom}^k(F,E) \otimes \mathrm{Hom}(E,E).
\end{aligned}
$$

となるので、$\mathbb{C}$-ベクトル空間の long exact sq.

$$\cdots \to \mathrm{Hom}^k(F,E)\otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}(E,E) \xrightarrow{\phi_k} \mathrm{Hom}^k(F,E) \to \mathrm{Hom}^k(G,E)$$

$$\to \mathrm{Hom}^k(F,E)\otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}(E,E) \xrightarrow{\phi_{k+1}} \mathrm{Hom}^{k+1}(F,E) \to \cdots$$

を得る． 各 ϕ_k は同型． ($\because$ $\mathbb{R}\mathrm{Hom}(E,E) = \mathbb{C}$).

$\therefore$ $\mathbb{R}\mathrm{Hom}(G,E) = 0$ i.e., $G \in {}^{\perp}\langle E\rangle$

$\mathbb{R}\mathrm{Hom}(F,E) \otimes^{\vee}_{\mathbb{C}} E$ は $\langle E\rangle$ の対象 (注 2.57)

$\mathbb{R}\mathrm{Hom}(E,F)\otimes_{\mathbb{C}} E \cong \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} E^{\oplus d_i}[-i]$.

これにより $\mathcal{D}$ の SOD

$$\mathcal{D} = \langle \langle E\rangle, {}^{\perp}\langle E\rangle \rangle$$

を得る．

$$\left(\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr] & & G \arrow[rr] \arrow[dl, "\sim"'] & & F \arrow[dl] \\
& G \arrow[ul, "{[1]}"] \arrow[ur, phantom, "\triangledown" near start] & & \mathbb{R}\mathrm{Hom}(F,E)^{\vee}\otimes E \arrow[ul, "{[1]}"] & \\
& \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & \\
& {}^{\perp}\langle E\rangle \ (= \mathcal{C}_2) & & \langle E\rangle \ (= \mathcal{C}_1) &
\end{tikzcd}\right)$$

同様にして、

$$G' \to \mathbb{R}\mathrm{Hom}(E,F) \otimes^L_{\mathbb{C}} E \xrightarrow{ev} F \to G'[1]$$

で G' を定めれば、 $G' \in \langle E \rangle^{\perp}$ となり

$$\mathcal{D} = \langle \langle E \rangle^{\perp}, \langle E \rangle \rangle$$

(Prop 4.31) より $\langle E \rangle$ は $\mathcal{D}$ の admissible subcat. □

次に、SOD の 定義4.18 で、すべての $\mathcal{E}_i$ が 例外対象 の生成する 充満部分三角圏 になる場合を考える.

Def 4.39 (例外生成列)

$E_1, \cdots, E_m$: $\mathcal{D}$ の例外対象

(i) $(E_1, \cdots, E_m)$ が 例外列 (exceptional collection)

であるとは、 $i<j$ のとき、

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}(E_j, E_i) = 0$$

が成立することをいう。

(ii) 例外列 $(E_1, \cdots, E_m)$ が $\mathcal{D}$ を古典的に生成するとき、

例外列 $(E_1, \cdots, E_m)$ を 例外生成列 という。

(full exceptional collection)

(iii) 例外列 $(E_1, \cdots, E_m)$ が 強例外列

(strong exceptional collection) であるとは、

任意の i, j 、任意の $k \neq 0$ に対して、

$$\mathrm{Hom}^k(E_j, E_i) = 0$$

が成り立つことをいう。 (どっちにも射がない)

(例 4.40)

(Q, ρ) : 順序付き関係式付き箙 (P.435)

$Q_0 = \{1, \cdots, m\}$.

$A = \mathbb{C}Q/I$: 道代数 とすると,

path algebra

$$\mathrm{Hom}^k(P(i), P(j)) = \begin{cases} e_j A_i & (k=0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$

$\therefore$ $(P(1), \cdots, P(m))$ は strong exceptional collection.

$E_1, \dots, E_m$ が $\mathcal{D}$ を古典的に生成.

$(E_1, \dots, E_m)$: $\mathcal{D}$ の例外生成列 とする.

(問4.21) より, $\mathcal{D}$ の SOD

$$\mathcal{D} = \langle \langle E_1 \rangle, \dots, \langle E_m \rangle \rangle$$

を得る. ($\mathcal{D} = \langle E_1, \dots, E_m \rangle$ とかく).

問 4.21

strictly full subcategory

三角圏 $\mathcal{D}$ の狭義充満部分三角圏

$$\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m$$

たちが, $i < j \Rightarrow \mathcal{C}_i \subset \mathcal{C}_j^{\perp}$

をみたすとする.

このとき,

「$\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m$ が $\mathcal{D}$ の SOD を与える」

$\Leftrightarrow$「$\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m$ が $\mathcal{D}$ を古典的に生成する」

classically generated.

(Def 4.18) の図式を具体的に表そう.

$$\left(\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr] & & F_m \arrow[r] \arrow[dl] & \cdots \arrow[r] & F_3 \arrow[rr] & & F_2 \arrow[rr] \arrow[dl] & & F \arrow[dl] \\
& C_m \arrow[ul, "{[1]}"] \arrow[u, phantom, "\triangledown"] & & & & C_2 \arrow[ul] \arrow[u, phantom, "\triangledown"] & & C_1 \arrow[ul] \arrow[u, phantom, "\triangledown"] &
\end{tikzcd}\right)$$

(4.5) で見たように、

${}^{\forall}F \in D, \quad {}^{\exists}F_2 \in {}^{\perp}\langle E_1 \rangle \quad {}^{\exists}C_1 \in \langle E_1 \rangle$

s.t.

$$F_2 \to F \to C_1 \to F_2[1].$$

次に、この F_2 に対し、

$${}^{\exists}F_3 \in {}^{\perp}\langle E_2 \rangle, \ {}^{\exists}C_2 \in \langle E_2 \rangle$$

s.t.

$$F_3 \to F_2 \to C_2 \to F_3[1]$$

$F_2, C_2 \in {}^{\perp}\langle E_1 \rangle$ なので $F_3 \in {}^{\perp}\langle E_1 \rangle$

$$\left(F_3 \in {}^{\perp}\langle E_1 \rangle \cap {}^{\perp}\langle E_2 \rangle \right) \quad \begin{pmatrix} & E_1 & \\ \swarrow & \perp \quad \perp & \\ F_3 \to & F_2 \to C_2 \to & \end{pmatrix}$$

これを繰り返し、各 $k \leq m$ に対し、

$${}^{\exists}F_{k+1} \in \bigcap_{i=1}^{k} {}^{\perp}\langle E_i \rangle \quad {}^{\exists}C_k \in \langle E_k \rangle$$

s.t.

$$F_{k+1} \to F_k \to C_k \to F_{k+1}[1] \ : \text{exact tri.}$$

$(E_1, \cdots, E_m)$ が D の生成列なので $\bigcap_{i=1}^{m} {}^{\perp}\langle E_i \rangle = \{0\}$

$\therefore \ F_{k+1} = 0.$ $\quad \uparrow \ \langle E_i \rangle^{\perp}$ じゃないけど…?

$\mathcal{D}$ に 例外生成列 $(E_1, \cdots, E_m)$ が 存在するとき.
(問 4.20) より, $K(\mathcal{D})$ は

$$[E_1], \cdots, [E_m]$$

により, 自由に生成される.

i.e., $$K(\mathcal{D}) = \mathbb{Z}[E_1] \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}[E_m]$$

これは, $\mathcal{D}$ が 例外生成列 を 持つための 必要条件を 与える.

(例) X : smooth projective alg. curve.
とすると $K(X) \cong \mathrm{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z}$. (Ha Ch2. Ex6.11)
よって, $X = \mathbb{P}^1$ の 場合以外は 例外生成列 を 持たない.

X : smooth proj. curve, genus $= g$ なら

$$\mathrm{Pic}(X) \cong \mathbb{C}^g/\Lambda \oplus \mathbb{Z}.$$

$$\left(0 \to \mathrm{Pic}^0(X) \to \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \to 0 \right)$$

$$\therefore\ K(X) \cong \mathbb{C}^g/\Lambda \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Lem 4.42

$K(X)$ が非自明な捻れ元を持たなければ、
$\mathrm{Pic}(X)$ も非自明な捻れ元を持たない。

∵

対偶を示す。

$L \in \mathrm{Pic}(X)$ を非自明な捻れ元とすると、

$$\exists N > 1 \quad \text{s.t.} \quad L^{\otimes N} \cong \mathcal{O}_X.$$

ここで、

$$\alpha := [L] - 1 = [L] - [\mathcal{O}_X] \in K(X)$$

とおくと、$\mathrm{rk}(\alpha) = 0$ なので、
Coniveau filtration の存在より

台の余次元が $\dim(X)+1$ 以上の $F \in \mathrm{Coh}(X)$ はない。

$$\alpha^{\dim(X)+1} = 0.$$

M を、$\alpha^M = 0$ なる最小の正の数とする。

$M = 1$ なら $[L] = [\mathcal{O}_X]$ in $K(X)$.

さらに、$\mathrm{Gr}^1(K(X)) \overset{\det}{\cong} \mathrm{Pic}(X)$ より、

$$L \cong \mathcal{O}_X.$$

これは、L が非自明なことに矛盾。 $\therefore M > 1$

$L^N \cong \mathcal{O}_X$

このとき、 $[L] = 1 + \alpha$ の N 乗を考えると、

$$1 = 1 + N \cdot \alpha + \alpha^2 \beta \qquad (\beta \in K(X)).$$

$$\therefore \quad 0 = N \cdot \alpha + \alpha^2 \beta$$

両辺に α^{M-2} をかけて、 $N\alpha^{M-1} = 0$.

$\therefore$ α^{M-1} は N-捻れ元. $\square$

[代数的多様体の導来圏が例外生成列を持つための必要条件]

$D^b(X)$ の許容部分三角圏 $\mathcal{C}$ の Hochschild (コ)ホモロジーを以下で定める：

(Prop 4.31) より、SOD

$$D^b(X) = \langle \mathcal{C}^\perp, \mathcal{C} \rangle$$

が存在.

このとき、(同 4.19) より、射影函手

$$\Psi : D^b(X) \longrightarrow \mathcal{C}$$

が存在.

FM函手.

[Kuznetsov Thm 3.7] より、

$$\exists! \, P \in D^b(X \times X) \quad \text{s.t.} \quad \Psi \simeq \Phi^P.$$

このとき、$\mathcal{C}$ の k 次 Hochschild コホモロジー $HH^k(\mathcal{C})$

Hochschild ホモロジー $HH_k(\mathcal{C})$

を次のように定める：

$$\begin{cases} HH^k(\mathcal{C}) := \mathrm{Hom}^k_{X \times X}(P, P) \\ HH_k(\mathcal{C}) := \mathrm{Hom}^k_{X \times X}(P, P \otimes^L p_2^* \omega_X [\dim(X)]) \end{cases}$$

$\mathcal{C} = D^b(X)$ のときは $P = \mathcal{O}_\Delta$ となり (§4.1) と一致.

Thm 4.43 (Kuznetsov)

X : smooth projective variety.

(i) SOD

$$D^b(X) := \langle \mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_m \rangle$$

が存在するとき.

次の Hochschild ホモロジー, 及び Grothendieck 群の同型がある :

$$\begin{cases} HH_k(X) \cong \bigoplus_{i=1}^{m} HH_k(\mathcal{C}_i). \\ K(X) \cong \bigoplus_{i=1}^{m} K(\mathcal{C}_i) \end{cases}$$

(ii) $\mathcal{C}$: $D^b(X)$ の admissible subcat.

$\mathcal{C}$ が SOD

$$\mathcal{C} = \langle \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \rangle$$

を持つとする. このとき.

各 $\mathcal{C}_i$ も $D^b(X)$ の admissible subcat.

また、P_i を射影函手

$$\Psi_i : D^b(X) \longrightarrow \mathcal{C}_i$$

の核とするとき、long exact sq.

$$\cdots \to HH^k(\mathcal{C}) \to HH^k(\mathcal{C}_1) \oplus HH^k(\mathcal{C}_2)$$

$$\to \mathrm{Hom}^{k+1}_{X \times X}(P_1, P_2) \to HH^{k+1}(\mathcal{C}) \to \cdots$$

が存在する。

full exceptional collection

$D^b(X)$ に例外生成列 $(E_1, \cdots, E_m)$ が存在するとき、

SOD

$$D^b(X) = \langle E_1, \cdots, E_m \rangle$$

が存在。

問 4.37　　　　例 5.15

また、$\langle E_i \rangle \cong D^b(\mathrm{Spec}(\mathbb{C}))$ で、$HH_*(\mathrm{Spec}(\mathbb{C})) \cong \mathbb{C}$.

∴ Thm 4.43 より

$$HH_*(X) \cong \bigoplus_{i=1}^m HH_*(\mathrm{Spec}(\mathbb{C})) \cong \mathbb{C}^m$$

Prop 4.44

$D^b(X)$ に 例外生成列 $(E_1, \cdots, E_m)$ が存在するとき、

$$p \neq q \Rightarrow h^{p,q}(X) = 0.$$

また、

$$\sum_{p=0}^{\dim(X)} h^{p,p}(X) = m$$

(∵)

$$\begin{cases} HH_0(X) = \bigoplus_p H^p(X, \Omega_X^p) \\ HH_*(X) = \bigoplus_n HH_n(X) \cong \mathbb{C}^m. \end{cases}$$

また、

$$HH_k(X) = 0 \quad \text{for} \quad k \geq 1$$

$$\left(\because \quad HH_k(X) \cong \bigoplus_{i=1}^m HH_k(\mathrm{Spec}(\mathbb{C})) = 0 \quad \text{for } k \geq 1, \right)$$

$$\therefore \quad HH_*(X) = HH_0(X) \cong \mathbb{C}^m.$$

$$\therefore \quad \sum h^{p,p}(X) = m.$$

$HH_k(X) = 0$ for $k \geq 1$ より $p \neq q \Rightarrow h^{p,q}(X) = 0.$ □

$$\left(HH_k(X) \cong \bigoplus_{q-p=k} H^q(X, \Omega_X^p) \right)$$