

§ 4.3 例外生成列

($\mathcal{D}$: $\mathbb{C}$ -linear tri. cat. .)

Def 4.35 (例外対象)

$\mathcal{D}$ の対象 E に対し

$$\mathrm{RHom}(E, E) = \mathbb{C}$$

が成り立つとき、

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}^i(E, E) = \begin{cases} \mathbb{C} & (i=0) \\ 0 & (i \neq 0) \end{cases}$$

が成り立つとき、 $E \in$ 例外対象 (exceptional object) である。

例外対象 $E \in D^b(X)$ に対し、自己同値 $\Phi \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{eq}}(D^b(X))$ に対し、 $\Phi(E) \in$ 例外対象 となる。

$$(\because \mathrm{RHom}(\Phi(E), \Phi(E)) = \mathrm{RHom}(E, E) = \mathbb{C}.)$$

例外対象が"ある", SOD が得られることを見る.

(b) 4.37

$E \in \mathcal{D}$ の例外対象 とする. 函手

$$- \otimes_{\mathbb{C}} E : \mathcal{D}^b(\text{Spec}(\mathbb{C})) \longrightarrow \mathcal{D}$$

は 充滿忠実 となり, その本質的像は $\langle E \rangle$ となる.

②

$$F, G \in \mathcal{D}^b(\text{Spec}(\mathbb{C})) \quad (\mathcal{D}^b(\text{Vect}(\mathbb{C})))$$

$$\mathbb{R}\text{Hom}(F, G) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F \otimes_{\mathbb{C}} E, G \otimes_{\mathbb{C}} E)$$

注.

$$F \otimes_{\mathbb{C}} E = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} E^{d_i}[-i]$$

$$\left(\begin{aligned} & \cong (G \otimes_{\mathbb{C}} E) \otimes^L (F \otimes_{\mathbb{C}} E)^{\vee} \\ & \cong \underbrace{\mathbb{R}\text{Hom}_{\mathbb{C}}(F, G)}_{\text{wavy line}} \otimes_{\mathbb{C}} \underbrace{\mathbb{R}\text{Hom}_{\mathbb{C}}(E, E)}_{\text{red arrow}} \end{aligned} \right)$$

$$(d_i = \dim H^i(F))$$

□

$$\begin{aligned} \textcircled{c} \quad \mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F \otimes_{\mathbb{C}} E, G \otimes_{\mathbb{C}} E) &= \bigoplus_i \left(\bigoplus_{q-p=i} (H^p(F)^{\vee} \otimes H^q(G))[-i] \right) \\ &\quad \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{D}}(E, E) \\ &= \bigoplus_i \left(\bigoplus_{q-p=i} \text{Hom}(H^p(F)[-p], H^q(G)[-q]) \right) \\ &\quad \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{D}}(E, E) \end{aligned}$$

Def

任意の対象 $E_1, E_2 \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ に対し.

$$\text{RHom}_{\mathcal{D}}(E_1, E_2) \in \mathcal{D}^b(\text{Vect}(\mathbb{C}))$$

が 有限次元. かつ,

$$\sum_i \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(E_1, E_2[i]) < \infty$$

が 成り立つとき, $\mathcal{D}$ は 有限型 (of finite type)
であると言われる.

X : smooth projective variety
のとき, $\mathcal{D}^b(X)$ は 有限型.

Lem 4.38

$\mathcal{D}$ が 有限型 である 仮定.

$E \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ を 例外対象 とする.

$\langle E \rangle$ は $\mathcal{D}$ の 許容部分三角圏.

(admissible sub-category)

⑦

D の exceptional object E が与えられたとき.

任意の対象 F に対し, 次の tri を考える.

$$G \rightarrow F \xrightarrow{\text{coev}} \text{RHom}(F, E)^\vee \otimes_c^L E \rightarrow G[1]$$

$$(G := \text{Cone}(\text{coev})[-1]) \quad (\text{p.48})$$

このとき, この exact tri. は コホモロジー-長列

$$\text{Hom}(-, E) : D^{\text{op}} \longrightarrow \text{Vect}(\mathbb{C})$$

に誘導される. (E は exceptional 対象.) $k \in \mathbb{Z}$ に対し.

$$\begin{aligned} & \text{Hom}^k(\text{RHom}(F, E)^\vee \otimes_c^L E, E) \\ \cong & \text{Hom}^k(E, E \otimes_c^L \text{RHom}(F, E)) \\ \cong & \text{Hom}(E, E \otimes_c^L \text{Hom}^k(F, E)) \\ \cong & \text{Hom}^k(F, E) \otimes_{\mathbb{C}} \text{Hom}(E, E). \end{aligned}$$

と誘導される. $\mathbb{C}$ -ベクトル空間 の long exact seq.

$$\dots \rightarrow \mathrm{Hom}^k(F, E) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}(E, E) \xrightarrow{\phi_k} \mathrm{Hom}^k(F, E) \rightarrow \mathrm{Hom}^k(G, E)$$

$$\rightarrow \mathrm{Hom}^k(F, E) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}(E, E) \xrightarrow{\phi_{k+1}} \mathrm{Hom}^{k+1}(F, E) \rightarrow \dots$$

を得る. 各 ϕ_k は同型. ($\because \mathrm{RHom}(E, E) = \mathbb{C}$).

$$\therefore \mathrm{RHom}(G, E) = 0 \quad \text{i.e.,} \quad G \in {}^{\perp}\langle E \rangle$$

$\mathrm{RHom}(F, E) \otimes_{\mathbb{C}}^L E$ は $\langle E \rangle$ の対象 (注 2.59) ↑

$$\mathrm{RHom}(E, F) \otimes_{\mathbb{C}} E \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} E^{\mathrm{add}}[-i].$$

$$(\mathrm{RHom}(F, E) \neq \mathrm{RHom}(E, F)^{\vee})$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{RHom}(E, F), \mathbb{C})$$

これに対し D の SOD

$$D = \langle \langle E \rangle, {}^{\perp}\langle E \rangle \rangle$$

を得る.

$$D^b(\mathrm{Vect}(\mathbb{C}))$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & F \\ \uparrow \scriptstyle \omega & \nabla & \swarrow & \uparrow \scriptstyle \omega & \nabla \\ \underbrace{G}_{\cong} & & & & \underbrace{\mathrm{RHom}(F, E)^{\vee} \otimes E}_{\cong} \\ {}^{\perp}\langle E \rangle (= C_2) & & & & \langle E \rangle (= C_1) \end{array} \right)$$

[31]

$$\mathbb{R} \mathrm{Hom}(E, F) \simeq \bigoplus_i \left(\mathrm{Hom}(E, F[i])[-i] \right) \quad \text{in } D^b(\mathrm{Vect}(\mathbb{C}))$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \mathrm{Hom}(E, F) \otimes_{\mathbb{C}} E &\simeq \bigoplus_i \left(\mathrm{Hom}(E, F[i]) \otimes_{\mathbb{C}} E \right)[-i] \\ &\simeq \bigoplus_i E^{d_i}[-i] \end{aligned}$$

$$(d_i = \dim \mathrm{Hom}(E, F[i]))$$

$$\mathbb{R} \mathrm{Hom}_D(E, F)^{\vee} = \mathrm{Hom} \left(\bigoplus_i \mathrm{Hom}_D(E, F[i])[-i], \mathbb{C} \right)$$

$$\left((F^{\bullet})^{\vee} = \mathbb{R} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(F^{\bullet}, \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(F^{\bullet}, \mathbb{C}) \right) \text{ in } D^b(\mathrm{Vect}(\mathbb{C}))$$

$$\simeq \bigoplus_i \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_D(E, F[i]), \mathbb{C})[i]$$

$$= \bigoplus_i \left(\mathrm{Hom}_D(E, F[i]) \right)^{\vee}[i]$$

$$\therefore \left(\mathbb{R} \mathrm{Hom}_D(F, E) \right)^{\vee} \otimes_{\mathbb{C}}^L E$$

$$\simeq \left(\bigoplus_i \mathrm{Hom}(F, E[i])^{\vee}[i] \right) \otimes_{\mathbb{C}}^L E$$

$$\simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} E^{\otimes d_i}[i] \quad \in \langle E \rangle$$

$$(d_i := \dim \mathrm{Hom}(F, E[i])^{\vee})$$

$$\mathrm{Hom}(F, E[i]) \otimes_{\mathbb{C}} F \xrightarrow{\mathrm{ev}} E[i]$$

{

$$F \xrightarrow{\mathrm{c.ev.}} \mathrm{Hom}(F, E[i])^{\vee} \otimes_{\mathbb{C}} E[i]$$

$$\mathrm{RHom}(E, F) \rightarrow \left(\bigoplus_i \mathrm{Hom}(E, F[i]) \right) \rightarrow 0 \rightarrow a$$

$[1]$

$$\mathrm{RHom}(E, F) \simeq \bigoplus_i \left(\mathrm{Hom}(E, F[i])[-i] \right)$$

in $D^b(\mathrm{Vect}(\mathbb{C}))$

$$\left(\bigoplus_i \left(\mathrm{Hom}(E, F[i])[-i] \right) \right) \otimes_{\mathbb{C}} E$$

$$\simeq \bigoplus_i E^{\oplus d_i}[-i]$$

$$\mathrm{RHom}(E, F)^{\vee}$$

$$d_i = \dim \mathrm{Hom}(E, F[i])$$

$$\mathrm{Hom} \left(\bigoplus_i \mathrm{Hom}(E, F[i])[-i], \mathbb{C} \right)$$

$$\left((F^*)^{\vee} =: \mathrm{RHom}(F^*, \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}(F^*, \mathbb{C}) \right)$$

$$\simeq \bigoplus_i \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}} \left(\mathrm{Hom}_D(E, F[i])[-i], \mathbb{C} \right)$$

$$\simeq \bigoplus_i \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}} \left(\mathrm{Hom}_D(E, F[i]), \mathbb{C} \right) [i]$$

$\bigoplus_i \mathrm{Hom}(E, F[i])^{\vee}[i]$

$$\left(R\mathrm{Hom}(E, F) \right)^{\vee} \simeq \bigoplus_i \mathrm{Hom}(E, F[i])^{\vee}[i]$$

$$j \in \mathbb{Z} \quad ; \quad \mathrm{Hom}(E, F[-j])^{\vee}$$

$$\left(R\mathrm{Hom}(F, E) \right)^{\vee} \otimes_{\mathbb{C}}^L E$$

$$\simeq \left(\bigoplus_i \mathrm{Hom}(F, E[i])^{\vee}[i] \right) \otimes_{\mathbb{C}}^L E$$

$$\simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} E^{\otimes d_i}[i] \in \langle E \rangle$$

$$d_i = \dim \mathrm{Hom}(F, E[i])^{(\vee)}$$

$$F \rightarrow \mathrm{Hom}(F, E[i])^{\vee} \otimes_{\mathbb{C}} E[i]$$

$$\mathrm{Hom}(F, E[i]) \otimes_{\mathbb{C}} F \rightarrow E[i]$$

$$(\phi(-), f) \mapsto \phi(f)$$

同様にして.

$$G' \rightarrow \mathcal{R}Hom(E, F) \otimes_G^L E \xrightarrow{ev} F \rightarrow G'[1]$$

で G' を定めれば, $G' \in \langle E \rangle^\perp$ となる.

$$\mathcal{D} = \langle \langle E \rangle^\perp, \langle E \rangle \rangle$$

(Prop 4.31) より $\langle E \rangle$ は $\mathcal{D}$ の admissible subcat.

□

次に, NOD の 定義 4.18 で, すべて $\mathcal{C}_i$ が例外対象の
生成する 充滿部分三角圏 になる場合を考えよう.

Def 4.39 (例外生成列)

$E_1, \dots, E_m : \mathcal{D}$ の例外対象

(i) $(E_1, \dots, E_m)$ が 例外列 (exceptional collection) であるとは、 $i < j$ のとき、

$$\mathrm{RHom}(E_j, E_i) = 0$$

が成立することという。

(ii) 例外列 $(E_1, \dots, E_m)$ が $\mathcal{D}$ を古典的に生成するとき、
例外列 $(E_1, \dots, E_m)$ を 例外生成列 いう。
(full exceptional collection)

(iii) 例外列 $(E_1, \dots, E_m)$ が 強例外列
(strong exceptional collection) であるとは、

任意の i, j , 任意の $k \neq 0$ に対して、

$$\mathrm{Hom}^k(E_j, E_i) = 0$$

が成立することという。

~~(E_i, E_j にも射がある)~~

$\uparrow$
 $\mathrm{Hom}(E_j, E_i)$ は
分かった。

(例 4.40)

(Q, p) : 川順序付と. 関係式付と $\overline{A}$. (P.435)

$$Q_0 = \{1, \dots, m\}.$$

$$A = \mathbb{C}Q/I \quad : \quad \text{道代数.} \quad \text{と好と.}$$

path algebra

$$\text{Hom}^k(P(i), P(j)) = \begin{cases} e_j A_i & (k=0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$

$\therefore (P(1), \dots, P(m))$ は strong exceptional collection.

$E_1, \dots, E_m$ が D を古典的に生成.

$(E_1, \dots, E_m) : D$ の例外生成列 とは.

(Def. 2.1) より, D の SOD

$$D = \langle \langle E_1 \rangle, \dots, \langle E_m \rangle \rangle$$

を得る. $(D = \langle E_1, \dots, E_m \rangle \text{ かつ })$.

Prop 4.21

strictly full subcategory

三角圏 D の狭義充満部分三角圏

$$C_1, \dots, C_m$$

$$\text{ただし, } i < j \Rightarrow C_i \subset C_j^\perp$$

が成り立つ.

このとき,

「 $C_1, \dots, C_m$ が D の SOD を与える」

$\Leftrightarrow$ 「 $C_1, \dots, C_m$ が D を古典的に生成する」

classically generated.

$\langle \Omega \rangle^\perp = 0$, (generated) thick sub cat $\langle \Omega \rangle^\perp = D$
(生成と充満による)

(Def 4.18) の図式を具体的に表そう.

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & F_m & \rightarrow & \dots & \rightarrow & F_3 \rightarrow F_2 \rightarrow F \\ \uparrow \swarrow \downarrow & & & & & & \uparrow \swarrow \downarrow & \uparrow \swarrow \downarrow \\ & & C_m & & & & C_2 & C_1 \end{array} \right)$$

(4.5) を見たように.

$$\forall F \in \mathcal{D}, \quad \exists F_2 \in {}^\perp \langle E_1 \rangle \quad \exists C_1 \in \langle E_1 \rangle$$

s.t.

$$F_2 \rightarrow F \rightarrow C_1 \rightarrow F_2[1].$$

次に、この F_2 に対し.

$$\exists F_3 \in {}^\perp \langle E_2 \rangle, \quad \exists C_2 \in \langle E_2 \rangle$$

s.t.

$$F_3 \rightarrow F_2 \rightarrow C_2 \rightarrow F_3[1]$$

$$F_2, C_2 \in {}^\perp \langle E_1 \rangle \text{ なので } F_3 \in {}^\perp \langle E_1 \rangle$$

$$\left(F_3 \in {}^\perp \langle E_1 \rangle \cap {}^\perp \langle E_2 \rangle \right) \quad \left(\begin{array}{c} E_1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ F_3 \rightarrow F_2 \rightarrow C_2 \end{array} \right)$$

これを繰り返す. 各 $k \leq m$ に対し.

$$\exists F_{k+1} \in \bigcap_{i=1}^k {}^\perp \langle E_i \rangle \quad \exists C_k \in \langle E_k \rangle$$

s.t.

$$F_{k+1} \rightarrow F_k \rightarrow C_k \rightarrow F_{k+1}[1] : \text{ exact tri.}$$

$$(E_1, \dots, E_m) \text{ が } \mathcal{D} \text{ の 生成列 なので } \bigcap_{i=1}^m {}^\perp \langle E_i \rangle = \{0\}$$

$$\therefore F_{k+1} = 0.$$

$$\uparrow \langle E_i \rangle^\perp \text{ は有限次元?}$$

$\mathcal{D}$ に 例外生成列 $(E_1, \dots, E_m)$ が 存在 する。

(向 4.20) より, $K(\mathcal{D})$ は

$$[E_1], \dots, [E_m]$$

により, 自由に生成される。

$$\text{i.e.,} \quad K(\mathcal{D}) = \mathbb{Z}[E_1] \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}[E_m]$$

これは, $\mathcal{D}$ が 例外生成列 を 持ったための 必要条件 である。

(例) X : smooth projective alg. curve.

$$\text{とすると} \quad K(X) \cong \text{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z}. \quad (\text{Ha Ch2. Ex 6.11})$$

よって, $X = \mathbb{P}^1$ の 場合 以外は 例外生成列 を 持たない。

$$\left(\begin{array}{l} X : \text{smooth proj. curve, genus} = g \geq 1 \\ \text{Pic}(X) \cong \mathbb{C}^g/\Lambda \oplus \mathbb{Z}. \\ (0 \rightarrow \text{Pic}^0(X) \rightarrow \text{Pic}(X) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \rightarrow 0) \\ \therefore K(X) \cong \mathbb{C}^g/\Lambda \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}. \end{array} \right)$$

Lem 4.42

$K(X)$ は 非自明な 複素元 を 持たない。

$\text{Pic}(X)$ は 非自明な 複素元 を 持たない。

(1)

対偶を示す。

$L \in \text{Pic}(X)$ が 非自明な 複素元 である。

$$\exists N > 1 \quad \text{s.t.} \quad L^{\otimes N} \cong \mathcal{O}_X.$$

いさ。

$$\alpha := [L] - 1 = [L] - [\mathcal{O}_X] \in K(X)$$

よって、 $\text{rk}(\alpha) = 0$ なる。

Convex filtration の 存在より

$$\alpha^{\dim(X)+1} = 0.$$

→ 上の 複素元 α^u
 $\dim(X)+1$ 以上の
 $F \in \text{Gr}(X)$ は ない。

M は、 $\alpha^M = 0$ なる 最小の 正の数 である。

$$M = 1 \quad \text{なら} \quad [L] = [\mathcal{O}_X] \quad \text{in } K(X).$$

$$\text{すなわち、} \quad \text{Gr}^1(K(X)) \cong \text{Pic}(X) \quad \text{by } \det.$$

$$L \cong \mathcal{O}_X.$$

これは、 L は 非自明 ではない 矛盾。 $\therefore M > 1$

$$L^N \cong \mathcal{O}_X$$

このとき, $[L] = 1 + \alpha$ の N 乗を考えると.

$$1 = 1 + N \cdot \alpha + \alpha^2 \beta \quad (\beta \in K(X)).$$

$$\therefore 0 = N \cdot \alpha + \alpha^2 \beta$$

両辺に α^{M-2} をかけると, $N\alpha^{M-1} = 0$.

$\therefore \alpha^{M-1}$ は N -乗根である.

□

Enriques surface : exceptional object は必ず $\mathbb{P}^1$.
full exceptional collection は必ず.

[代数的様体の導来圏が例外生成列を持ったための必要条件]

$D^b(X)$ の許容部分三角圏 $\mathcal{C}$ の Hochschild (コ)ホモロジーを以下で定める:

(Prop 4.31) $\mathbb{F}$, SOD

$$D^b(X) = \langle \mathcal{O}^\perp, \mathcal{C} \rangle$$

が存在.

このとき, (Def 4.19) $\mathbb{F}$, 射影函手

$$\Psi : D^b(X) \longrightarrow \mathcal{C}$$

が存在.

[Kuznetsov Thm 3.7] $\mathbb{F}$,

$$\exists! P \in D^b(X \times X) \quad \text{s.t.} \quad \Psi \cong \Phi^P.$$

FM 函手

$\downarrow$

このとき, $\mathcal{C}$ の k 次 Hochschild コホモロジー $HH^k(\mathcal{C})$

Hochschild ホモロジー $HH_k(\mathcal{C})$

を次のように定める:

$$\begin{cases} HH^k(\mathcal{C}) := \text{Hom}_{X \times X}^k(P, P) \\ HH_k(\mathcal{C}) := \text{Hom}_{X \times X}^k(P, P \otimes^L \mathcal{P}_2^* \omega_X[\dim(X)]) \end{cases}$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{D}^b(X) \text{ なら } P = \mathcal{O}_X \text{ であり } (\S 4.1) \text{ と一致.}$$

Thm 4.43 (Kuznetsov)

X : smooth projective variety.

(i) SOD

$$\mathcal{D}^b(X) = \langle \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m \rangle$$

が成立するとき.

次の Hochschild ホモロジ- , 及び Grothendieck 群の
同型 が成り立つ :

$$\begin{cases} HH_k(X) \cong \bigoplus_{i=1}^m HH_k(\mathcal{C}_i). \\ K(X) \cong \bigoplus_{i=1}^m K(\mathcal{C}_i) \end{cases}$$

(ii) $\mathcal{C} : \mathcal{D}^b(X)$ の admissible subcat.

$\mathcal{C}$ が SOD

$$\mathcal{C} = \langle \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \rangle$$

を持つとき. このとき.

各 $\mathcal{C}_i \in \mathcal{D}^b(X)$ の admissible subcat.

また, P_i は射影直線.

$$\psi_i : D^b(X) \rightarrow \mathcal{C}_i$$

の核があるとき, long exact sq.

$$\dots \rightarrow HH^k(\mathcal{C}) \rightarrow HH^k(\mathcal{C}_1) \oplus HH^k(\mathcal{C}_2)$$

$$\rightarrow \text{Hom}_{X \times X}^{k+1}(P_1, P_2) \rightarrow HH^{k+1}(\mathcal{C}) \rightarrow \dots$$

が存在する.

full exceptional collection

$D^b(X)$ に 例外生成列 $(E_1, \dots, E_m)$ が存在するとき.

SOD

$$D^b(X) = \langle E_1, \dots, E_m \rangle$$

が存在.

例 4.37

例 4.15

$$\text{また, } \langle E_i \rangle \cong D^b(\text{Spec}(\mathbb{C})) \text{ かつ } HH_*(\text{Spec}(\mathbb{C})) \cong \mathbb{C}.$$

∴ Thm 4.43 より

$$HH_*(X) \cong \bigoplus_{i=1}^m HH_*(\text{Spec}(\mathbb{C})) \cong \mathbb{C}^m$$

Prop 4.44

$D^b(X)$ に例外生成列 $(E_1, \dots, E_m)$
 が存在するとき、

$$p \neq q \Rightarrow h^{p,q}(X) = 0.$$

また、

$$\sum_{p=0}^{\dim(X)} h^{p,p}(X) = m$$

(~)

$$\begin{cases} HH_0(X) = \bigoplus_p H^p(X, \Omega_X^p) \\ HH_+(X) = \bigoplus_n HH_n(X) \cong \mathbb{C}^m. \end{cases}$$

また、

$$HH_k(X) = 0 \quad \text{for } k \geq 1$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{(-)} \\ HH_k(X) \cong \bigoplus_{i=1}^m \left(HH_k(\text{Spec}(\mathbb{C})) \right) = 0 \\ \text{for } k \geq 1, \end{array} \right)$$

$$\therefore HH_k(X) = HH_0(X) \cong \mathbb{C}^m.$$

$$\therefore \bigcup h^{p,p}(X) = m.$$

$$HH_k(X) = 0 \quad \text{for } k \geq 1 \quad \& \quad p \neq q \Rightarrow h^{p,q}(X) = 0.$$

$$(HH_k(X) \cong \bigoplus_{q-p=k} H^q(X, \Omega_X^p))$$