20:05 ~

§4.2 半直交分解

($D^b(X)$ を細かく分解したい……)

Def 4.18 (半直交分解 Semi-Orthogonal decomposition)

三角圏 $\mathcal{D}$ の 半直交分解 (semi-orthogonal decomposition) とは、
$\mathcal{D}$ の 狭義充満部分三角圏 の組 $\mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_m$ であって、

$$i < j \Rightarrow \mathcal{C}_i \subset \mathcal{C}_j^{\perp}$$

が成り立ち、
さらに、すべての $F \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ に対して次の図式が存在すること。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F_m \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & F_3 \arrow[r] & F_2 \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[d] \\
& C_m \arrow[ul, dashed, "{[1]}"] & & & C_2 \arrow[ul, dashed, "{[1]}"] & C_1 \arrow[ul, dashed, "{[1]}"]
\end{tikzcd}$$

ここで、すべての三角図式は exact tri. であり、
各 i に対し、 $C_i \in \mathcal{C}_i$ が成立。

このとき $\mathcal{D}$ は $\mathcal{C}_i$ たちの対象すべてで古典的に生成されているので、

$$\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \cdots, \mathcal{C}_m \rangle$$

とかく。

この SOD が 極大 (maximal) であるとは、各 $\mathcal{C}_i$ が
非自明な SOD を持たないこと をいう。

問4.19

F ∈ D に対し、(Def 4.18) の図式を考える.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & F_m \arrow[r] \arrow[dr] & \cdots \arrow[r] & F_3 \arrow[r] \arrow[dr] & F_2 \arrow[r] \arrow[dr] & F \\
C_m \arrow[u, dashed, "{[1]}"] \arrow[ur, phantom, "\triangledown"] & & & & C_2 \arrow[ul, dashed, "{[1]}"] & C_1 \arrow[ul, dashed, "{[1]}"]
\end{tikzcd}
$$

Fに対し、F_i, C_i は同型を除いて一意に定まり、
さらに F に対して F_i, C_i を決める対応は函手的.

$$F \to C_1 \to F_2 \to F[1]$$

↻

$$
\begin{tikzcd}
F_2[-1] \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d, "id"] & C_1 \arrow[r] & F_2 \\
F_2'[-1] \arrow[r] & F \arrow[r] & C_1' \arrow[r] & F_2'
\end{tikzcd}
$$

(問2.15(2))より、 $\mathrm{Hom}(F_2[-1], C_1') = 0$, $\mathrm{Hom}(F_2[-1], C_1'[-1]) = 0$

ならば、
$$
\begin{cases}
f: F_2[-1] \to F_2'[-1] \\
g: C_1 \to C_1'
\end{cases}
$$
で、図式を可換にするものが唯一つ存在.

Def 4.23 (admissible subcategory)

$\mathcal{C}$: 三角圏 $\mathcal{D}$ の strictly full subcat.

i : $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{D}$; sub cat. の構造を与える埋込.

i が 右(左)随伴関手 を持つとき,

$\mathcal{C}$ を $\mathcal{D}$ の 右(左)許容部分三角圏 という.

(right (left) admissible subcategory)

right admissible かつ left admissible な sub (tri) cat. を,

許容部分三角圏 (admissible subcategory) という.

X, Y ; smooth proj. var.

$\Phi : D^b(X) \hookrightarrow D^b(Y)$; fully faithful functor

このとき, (問 3.1) (Thm 2.53) より. ← Orlov

$^\exists P \in D^b(X \times Y)$ s.t. $\Phi \cong \Phi^P_{X \to Y}$

かつ Φ は 右随伴, 左随伴 を持つ.

よって $D^b(X)$ は $D^b(Y)$ の admissible subcategory.

$$\left(\begin{cases} \Phi^L := \Phi^{P^\vee \otimes \pi_Y^* \omega_Y [\dim Y]}_{Y \to X} \\ \Phi^R := \Phi^{P^\vee \otimes \pi_X^* \omega_X [\dim X]}_{Y \to X} \end{cases} \right)$$

Y : smooth quasi-projective variety.

C : smooth な Y の closed subvariety

s.t. $\mathrm{codim}_Y(C) = c$.

$f : X \to Y$; C に沿った Y のブローアップ.

E : f での例外因子.

このとき, $f|_E : E \to C$ は

$\mathbb{P}(N_{C/Y}^\vee) \to C$ と同型.

$\left(\mathbb{P}(\mathcal{I}_C/\mathcal{I}_C^2) \to C \right)$ local には. $C \times \mathbb{P}^{c-1}$

$$
\begin{array}{ccc}
E & \overset{j}{\hookrightarrow} & X \\
f|_E \downarrow & & \downarrow f \quad \text{(blow-up)} \\
C & \underset{i}{\hookrightarrow} & Y
\end{array}
$$

整数 $k \in \mathbb{Z}$ に対して. 函手 $\Phi_k : D^b(C) \to D^b(X)$ を.

$$\Phi_k(-) = j_*\left((f|_E)^*(-) \otimes \mathcal{O}_E(-k) \right)$$

で定義.

$\left(j_* = \mathbb{R}j_*, \quad (f|_E)^* = \mathbb{L}(f|_E)^*, \quad \otimes = \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \right)$.

$$\Phi_k(-) = j_* \circ ((f|_E)^*(-) \otimes \mathcal{O}_E(-k)) \; ; \; D^b(C) \to D^b(X)$$

Thm 4.26

$\mathbb{L}f^*$, 各 Φ_k は fully faithful であり、さらに、
$D^b(X)$ の次のような SOD が存在：

$$D^b(X) = \langle \Phi_{-(c-1)}(D^b(C)), \dots, \Phi_{-1}(D^b(C)), \mathbb{L}f^*(D^b(Y)) \rangle$$

☺

SOD については 9.31 で示す。

$$\begin{cases} \Phi_{-(c-1)}(D^b(C)) = j_* \circ ((f|_E)^*(D^b(C)) \otimes \mathcal{O}_E(c-1)) \\ \quad \vdots \\ \Phi_{-1}(D^b(C)) = j_* \circ ((f|_E)^*(D^b(C)) \otimes \mathcal{O}_E(1)) \end{cases}$$

$\mathbb{L}f^*$ が fully faithful であることのみ示す。

(Prop 2.50) (Prop 2.49) より。

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{L}f^*\mathcal{E}, \mathbb{L}f^*\mathcal{F}) \overset{\mathbb{L}f^* \dashv \mathbb{R}f_*}{\cong} \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathbb{R}f_*(\mathbb{L}f^*\mathcal{F}))$$

$$\underset{\text{Proj. formula}}{\cong} \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathbb{R}f_*\mathcal{O}_X)$$

ここで、ブローアップについては $\mathbb{R}f_*\mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_Y$ なので、

$$\cong \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$$

$\therefore$ $\mathbb{L}f^*$ は fully faithful

□

Rem 4.27

X, Y : smooth quasi-projective varieties

$\mathbb{R}f_* \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_Y$ なる $f : X \to Y$; projective morphism

に対しては、同じ方法で

$$\mathbb{L}f^* : D^b(Y) \longrightarrow D^b(X)$$

は fully faithful.

Rem 4.28

Y が smooth でなければ、$\mathbb{L}f^*$ は $D^b(Y)$ 上では定義されない ($\mathbb{L}f^* : D^-(Y) \to D^-(X)$).

Y : smooth quasi-projective variety

$\mathcal{E}$: Y 上の rank r locally free sheaf

f : $X := \mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow Y$

$k \in \mathbb{Z}$ に対し、函手 $\Phi_k : D^b(Y) \longrightarrow D^b(X)$ を

$$\Phi_k(-) := f^*(-) \otimes \mathcal{O}_X(k)$$

と定める. (f は flat なので、$f^* = \mathbb{L}f^*$).

$X = \mathbb{P}(\mathcal{E})$
$\downarrow f$
Y

$$\Phi_k(-) := f^*(-) \otimes \mathcal{O}_X(k) \quad ; \quad D^b(Y) \to D^b(X)$$

Thm 4.29

f^* と 各 Φ_k は fully faithful で、さらに、

$D^b(X)$ の次のような SOD が存在：

$$D^b(X) = \langle \Phi_{-(r-1)}(D^b(Y)), \dots, \Phi_{-1}(D^b(Y)), f^*(D^b(Y)) \rangle$$

(:)

（同じく 4.31 で …）

$f^* = \mathbb{L}f^*$ が fully faithful であることについて：

$\mathbb{L}f^* \dashv \mathbb{R}f_*$

$$\mathrm{Hom}(f^*\mathcal{E}, f^*\mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathbb{R}f_*(f^*\mathcal{F}))$$
$$\cong \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathbb{R}f_*\mathcal{O}_X)$$
$$\cong \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$$

$\mathbb{R}f_*\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_Y$

$\therefore$ f^* は fully-faithful. $\square$

[admissible subcategory と semi orthogonal decomposition の関係]

Prop 4.31

$\mathcal{C}$: 三角圏 $\mathcal{D}$ の full subcategory
i : $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{D}$ full subcategory の構造を与える fully faithful な埋込.

このとき, 次は同値.

(i) i は右(左)随伴関手を持つ. つまり, $\mathcal{C}$ は $\mathcal{D}$ の右(左) admissible subcategory

(ii) Semi-orthogonal decomposition

$$\mathcal{D} = \langle i(\mathcal{C})^{\perp}, i(\mathcal{C}) \rangle$$

$$(\mathcal{D} = \langle i(\mathcal{C}), {}^{\perp}i(\mathcal{C}) \rangle)$$

が存在.

∵

[(i) ⇒ (ii)] $\mathcal{C} \underset{i}{\overset{i^R}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{\top}}}} \mathcal{D}$ $(i \dashv i^R)$ とする.

(3.2) により, 自然変換

$$\eta : i \circ i^R \longrightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$$

を考える.

$$\left(\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(i^R(E), i^R(E)) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(i \circ i^R(E), E) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \mathrm{id}_{i^R(E)} & \longmapsto & \eta(E) \end{array} \right)$$

$\rightsquigarrow \eta : i \circ i^R \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$

任意の $F \in D$ に対し (Def 2.5 (c)) より dist. tri.

$$i \circ i^R(F) \xrightarrow{\eta(F)} F \longrightarrow G$$

を得る。このとき、任意の $C \in D$ に対し、コホモロジー函手

$$\mathrm{Hom}_D(i(C), -) : D \longrightarrow \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$$

を考えると、long exact sq.

$$\mathrm{Hom}^k(C, i^R(F)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^k(i(C), F)$$

$$\mathrm{Hom}^k(C, i^R(F)) \cong \underbrace{\mathrm{Hom}^k(i(C), i \circ i^R(F))}$$

$$\to \mathrm{Hom}^k(i(C), i \circ i^R(F)) \xrightarrow{\phi_k} \mathrm{Hom}^k(i(C), F) \to \mathrm{Hom}^k(i(C), G)$$

$$\to \mathrm{Hom}^{k+1}(i(C), i \circ i^R(F)) \xrightarrow{\phi_{k+1}} \mathrm{Hom}^{k+1}(i(C), F) \to \mathrm{Hom}^{k+1}(i(C), G)$$

$$\to \cdots$$

を得る。各 ϕ_k は $\eta(F)$ $(: i \circ i^R(F) \to F)$ の作り方から同型。

$\eta : i \circ i^R \to \mathrm{id}_D$ は自然変換であるだけだけど OK ?

ゆえに、$\mathbb{R}\mathrm{Hom}(i(C), G) = 0$ より $G \in i(C)^\perp$.

$\therefore \quad D = \langle i(\mathcal{C})^\perp, i(\mathcal{C}) \rangle$

$$i(\mathcal{C})^\perp \subset i(\mathcal{C})^\perp$$

すべての $F \in D$ について

$$0 \to F_2 \xrightarrow{\eta(F)} F, \quad F_2 = i \circ i^R(F)$$

$$[1] \quad \circ \quad \swarrow \mathrm{id} \quad [1] \quad \circ \quad \swarrow$$

$$F_2 \qquad\qquad G$$

$G \in i(\mathcal{C})^\perp \quad (= \mathcal{C}_1)$

$F_2 \in i(\mathcal{C})$

$$\left(\begin{array}{c}0 \to F \to E \\ F \in i(\mathcal{C}),\ G \in i(\mathcal{C})^{\perp}\end{array}\right)$$

[(ii) ⇒ (i)]

逆に、SOD $\mathcal{D} = \langle i(\mathcal{C})^{\perp}, i(\mathcal{C}) \rangle$ が与えられたとする。

任意の $E \in \mathcal{D}$ に対し、dist. tri.

$$F \to E \to G \to F[1]$$

$$(F \in i(\mathcal{C}),\ G \in i(\mathcal{C})^{\perp})$$

が存在する（定義）。 $F =: i^R(E)$ と定める。

$(F := i \circ i^R(E)\ ?)$

(問 2.15) により i^R は $\mathcal{D}$ から $\mathcal{C}$ への函手を定める。

任意の $C \in \mathcal{C}$ に対し、$\mathrm{Hom}(i(C), -)$ を施すと、

$$\to \mathrm{Hom}^k(i(C), i^R(E)) \to \mathrm{Hom}^k(i(C), E) \to \mathrm{Hom}^k(i(C), G)$$

$$\to \mathrm{Hom}^{k+1}(i(C), i^R(E)) \to \mathrm{Hom}^{k+1}(i(C), E) \to \mathrm{Hom}^{k+1}(i(C), G)$$

$$\to \cdots$$

$$\begin{array}{ccccccc} i^R(E) = F & \to & E & \to & G & \to & F[1] \\ \downarrow {}^{\exists!}f & & \downarrow & & \downarrow {}^{\exists!}g & & \\ i^R(E') = F' & \to & E' & \to & G' & \to & F'[1] \end{array}$$

$G \in i(C)^{\perp}$ より、 $\mathbb{R}\mathrm{Hom}(i(C), G) = 0$.

$\therefore\ \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, i^R(E)) \cong \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(i(C), E)$.

$(= \mathbb{R}\mathrm{Hom}(i(C), i^R(E)))$

$\therefore\ i \dashv i^R$ □

$\circlearrowleft$

$\mathbb{R}\mathrm{Hom}(C, i^R(E')) \cong \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(i(C), E')$

Cor 4.33

X : smooth proj. var.

$D^b(X)$ に対し、SOD

$$D^b(X) = \langle \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \cdots, \mathcal{C}_m \rangle$$

が存在すれば、各 $\mathcal{C}_i$ たちは常に admissible subcategory

[Bondal, Kaplanov '90]

Ref 4.34

(i) 三角圏 $\mathcal{D}$ が Noether 性 (Noetherian property) を持つとは、

$\mathcal{D}$ の admissible subcategory が昇鎖条件をみたす。

つまり、admissible subcategory の昇鎖列

$$\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{D}$$

があるとき、十分大きな i において

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{i+1} = \cdots$$

が成り立つことをいう。

(ii) 三角圏 $\mathcal{D}$ が Jordan - Hölder 性 (Jordan - Hölder property) をみたすとは、$\mathcal{D}$ が Noether 性を持ち、さらに次の性質をみたすこととする:

$\mathcal{D}$ が admissible subcategory たちからなる 2つの極大な SOD

$$\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \cdots, \mathcal{C}_m \rangle = \langle \mathcal{C}_1', \mathcal{C}_2', \cdots, \mathcal{C}_n' \rangle$$

を持つなら、$n = m$ である。

また、$\exists \sigma \in \mathfrak{S}_n$ s.t. $1 \leq {}^\forall i \leq n$,

$$\mathcal{C}_i \simeq \mathcal{C}_{\sigma(i)}'$$

(? $\mathcal{D}$ が Noether 性 $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{D}$ は必ず極大な SOD がとれる)

p. 78