§ t-structure と hearts (復習)

Def 7.1

$\mathcal{D}$: 三角圏.

$\mathcal{D}$ の充満部分圏 $\mathcal{D}^{\le 0}$ と $\mathcal{D}^{\ge 0}$ が次の条件をみたすとき、
$(\mathcal{D}^{\le 0}, \mathcal{D}^{\ge 0})$ は $\mathcal{D}$ の t-構造 (t-structure) という.

またこのとき,

$$\begin{cases} \mathcal{D}^{\le n} := \mathcal{D}^{\le 0}[-n] \\ \mathcal{D}^{\ge n} := \mathcal{D}^{\ge 0}[-n] \end{cases}$$

と定める.

(条件)

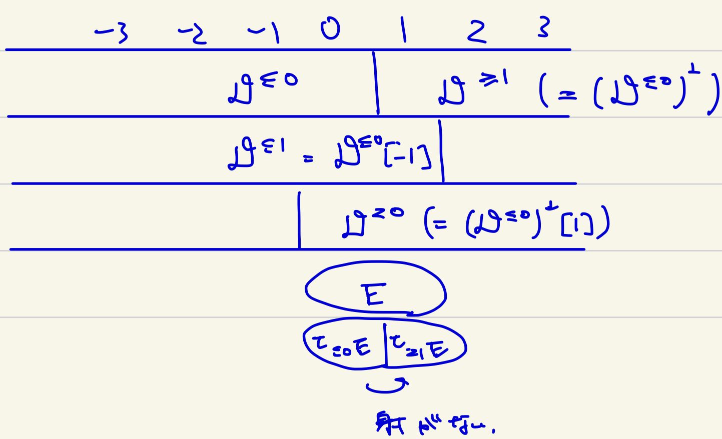
① $\mathcal{D}^{\le 0} \subset \mathcal{D}^{\le 1}$, $\mathcal{D}^{\ge 1} \subset \mathcal{D}^{\ge 0}$ が成立.

② $\mathcal{D}^{\ge 1} \subset (\mathcal{D}^{\le 0})^{\perp}$ が成立.

③ $\forall E \in \mathcal{D}$, $\exists$ exact tr.

$$\tau_{\le 0} E \to E \to \tau_{\ge 1} E \to (\tau_{\le 0} E)[1]$$

$(\tau_{\le 0} E \in \mathcal{D}^{\le 0},\ \tau_{\ge 1} E \in \mathcal{D}^{\ge 1})$



$(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ が t-structure を与えるとき、$\mathcal{D}$ の部分圏

$$\mathcal{D}^{\leq 0} \cap \mathcal{D}^{\geq 0}$$

を、t-構造の核 (the heart of t-structure) とよぶ。

Fact (GM03, Thm IV.4.4, HTT (D加藤) Thm 8.1.9 (i))

t-structure の heart は Abel 圏の構造を持つ

例

Abel 圏 $\mathcal{A}$ の導来圏 $\mathcal{D} := \mathcal{D}(\mathcal{A})$ に対し、

$$\mathcal{D}^{\leq 0} := \{ E \in \mathcal{D} \mid \mathcal{H}^i(E) = 0, \quad i > 0 \}$$
$$\mathcal{D}^{\geq 0} := \{ E \in \mathcal{D} \mid \mathcal{H}^i(E) = 0, \quad i \leq -1 \}$$

と定めると、$(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ は $\mathcal{D}$ の t-structure で、

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^{\leq 0} \cap \mathcal{D}^{\geq 0} \quad ; \quad E \mapsto (\cdots \to 0 \to E \to 0 \to \cdots)$$

Def 7.6.

三角圏 $\mathcal{D}$ の t-structure $\mathcal{D}^{\leq 0} \subset \mathcal{D}$ が有界であるとは、

$$D = \bigcup_{i,j \in \mathbb{Z}} (\mathcal{D}^{\leq i} \cap \mathcal{D}^{\geq j})$$

が成立すること。

Prop

自然な包含函手 $\iota : \mathcal{D}^{\le n} \longrightarrow \mathcal{D}$ を考える.

このとき, 函手 $\tau_{\le n} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}^{\le n}$ が存在して,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\le n}}(Y, \tau_{\le n}(X)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\iota(Y), X).$$

同様に, 自然な包含函手 $\iota' : \mathcal{D}^{\ge n} \longrightarrow \mathcal{D}$ に対し,

函手 $\tau_{\ge n} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}^{\ge n}$ が存在して,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\ge n}}(\tau_{\ge n}(X), Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, \iota'(Y)).$$

(proof: たとえば HTT (D-か.[illegible]) prop 8.1.8)

t-structure の heart $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ が与えられたとき.

各 $i \in \mathbb{Z}$ に対して次の cohomological functor

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{H}^i_{\mathcal{A}} : & D & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & E & \longmapsto & \tau_{\ge i}\tau_{\le i}(E)[i] \end{array}$$

が定義できる $\left(\mathcal{H}^i_{\mathcal{A}}(E) = \tau_{\ge i}\tau_{\le i}(E)[i]\right)$

問7.7.

(i) $\mathcal{A}$: 三角圏 $\mathcal{D}$ の加法部分圏.

このとき. $\mathcal{A}$ が有界な t-structure の heart であることと.

次の2つの条件が成立することは同値.

(a) $\forall k_1 > k_2 \ (\in \mathbb{Z})$, $\forall A, B \in \mathcal{A}$.

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A[k_1], B[k_2]) = 0.$$

(b) $0 \neq \forall E \in \mathcal{D}$, ∃整数列 $k_1 > k_2 > \cdots > k_n$,

∃ exact tr.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 = E_0 \arrow[rr] & & E_1 \arrow[dl] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E_{n-1} \arrow[rr] & & E_n = E \arrow[dl] \\
& A_1 \arrow[ul] \arrow[u, phantom, "\triangledown"] & & & & A_n \arrow[ul] \arrow[u, phantom, "\triangledown"] &
\end{tikzcd}$$ — ☆

s.t. $\forall j$, $A_j \in \mathcal{A}[k_j]$

(ii) 三角圏 $\mathcal{D}$ が有界な t-structure を持つとし.

その heart を $\mathcal{A}$ とおく.

このとき.

$$K(\mathcal{D}) \cong K(\mathcal{A}).$$

Lem

1つ目の条件(△)の下で、2つ目の完全三角の列は(同型を除いて)一意に定まる。

∵ $0 \neq E \in \mathcal{D}$ に対して、次の2つの列が得られたとする。

$\exists\, k_1 > k_2 > \cdots > k_n$

$$\exists\ \begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & E_1 \arrow[r] \arrow[d] & E_2 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & E_{n-1} \arrow[r] & E_n = E \arrow[d] \\
& A_1 \arrow[ul] & A_2 \arrow[ul] & & & A_n \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

s.t. $A_1 \in A[k_1]$, $A_2 \in A[k_2]$, …, $A_n \in A[k_n]$

$\exists\, k'_1 > k'_2 > \cdots > k'_m$

$$\exists\ \begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & E'_1 \arrow[r] \arrow[d] & E'_2 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & E'_{m-1} \arrow[r] & E'_m = E \arrow[d] \\
& A'_1 \arrow[ul] & A'_2 \arrow[ul] & & & A'_m \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

s.t. $A'_1 \in A[k'_1]$, $A'_2 \in A[k'_2]$, …, $A'_m \in A[k'_m]$

Step 1.

$k'_1 \geq k_1$ として一般性を失わない。

j を $E'_1 \subset E_j$ なる最小の数とする。

このとき、

$$A'_1 \simeq E'_1 \hookrightarrow E_j \longrightarrow A_j \quad \text{は非自明な射.}$$

$A'_1 \in A[k'_1]$, $A_j \in A[k_j]$

よって、条件(a)より、 $k_1' \le k_j$ 特に、

$$k_j \geq k_1' \geq k_1 \geq k_j$$ となり

$$k_j = k_1' = k_1$$ 特に $j = 1$. で $E_1' \subset E_1$

$k_1 \geq k_1'$ として同様の議論で $E_1 \subset E_1'$ ∴ $E_1 = E_1'$.

<u>Step 2.</u>

E_l まで同型だとする。 $\left(k_j = k_j' \quad (1 \le j \le l) \right)$

$l+1$ 番目について。 $k_{l+1} \le k'_{l+1}$ を仮定。

$(E_l \subsetneq)\ E'_{l+1} \subset E_j$ なる j をとる。 $(l+1 \le j)$

$E'_{l+1} \hookrightarrow E_j$ が存在するので、三角圏の公理3から、

$$\begin{tikzcd}
E_l \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & E'_{l+1} \arrow[r] \arrow[d, hook] & A'_{l+1} \arrow[r, "+1"] \arrow[d, dashed, "\exists"'] & {} \\
E_l \arrow[r] & E_j \arrow[r] & A_j \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

このとき、 $A'_{l+1} \to A_j$ が存在。 ∴ $k'_{l+1} \le k_j$

仮定より $$k_{l+1} \le k'_{l+1} \le k_j \overset{l+1 \le j}{\le} k_{l+1}$$

∴ $$k_{l+1} = k'_{l+1} = k_j$$

つまり、 $j = l+1$ で 特に、 $E'_{l+1} \subset E_{l+1}$.

$k_{l+1} \geq k'_{l+1}$ なので同様の議論で $E'_{l+1} = E_{l+1}$ □

[Proof of 命7.7 (i)]

[$\Rightarrow$] $\mathcal{A}$ を有界な t-structure の heart とする.

<u>Claim 1.</u>

$$\forall k_1 > k_2 \ (\in \mathbb{Z}), \quad \forall A, B \in \mathcal{A},$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A[k_1], B[k_2]) = 0$$

∵

$$A[k_1] \in \mathcal{A}[k_1] = (\mathcal{D}^{\leq 0} \cap \mathcal{D}^{\geq 0})[k_1] = \mathcal{D}^{\leq -k_1} \cap \mathcal{D}^{\geq -k_1}$$
$$B[k_2] \in \mathcal{D}^{\leq -k_2} \cap \mathcal{D}^{\geq -k_2}$$

$k_1 > k_2$ より $-k_1 < -k_2$ で, また t-structure の定義から

$\mathcal{D}^{\geq 1} \subset (\mathcal{D}^{\leq 0})^{\perp}$ なので $\mathcal{D}^{\geq -k_2} \subset (\mathcal{D}^{\leq -k_1})^{\perp}$

$\therefore \ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A[k_1], B[k_2]) = 0.$

<u>Claim 2.</u>

$$0 \neq {}^{\forall}E \in \mathcal{D}, \quad \exists k_1 > k_2 > \cdots > k_n \quad (\in \mathbb{Z})$$

$$\exists \quad \begin{tikzcd} 0 = E_0 \arrow[r] & E_1 \arrow[r] \arrow[dl] & \cdots \arrow[r] & E_{n-1} \arrow[r] & E_n = E \arrow[dl] \\ A_1 \arrow[u, "{[1]}"] \arrow[u, phantom, shift right=4ex, "\triangle"] & & & A_n \arrow[u, "{[1]}"] \arrow[u, phantom, shift right=4ex, "\triangle"] & \end{tikzcd}$$

s.t. $\forall j, \ A_j \in \mathcal{A}[k_j]$

∵ 有界性から $\mathcal{D} = \bigcup_{i,j \in \mathbb{Z}} (\mathcal{D}^{\leq i} \cap \mathcal{D}^{\geq j})$ なので,

$${}^{\forall}E \in \mathcal{D}, \quad \exists j \leq i \ (\in \mathbb{Z}) \ \text{s.t.} \ E \in \mathcal{D}^{\leq i} \cap \mathcal{D}^{\geq j}.$$

このとき、次の列が存在する：

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0=\tau_{\le j-1}(E) \arrow[rr] & & \tau_{\le j}(E) \arrow[rr] \arrow[dl] & & \tau_{\le j+1}(E) \arrow[r] \arrow[dl] & \cdots \arrow[r] & \tau_{\le i-1}(E) \arrow[rr] & & \tau_{\le i}(E)=E \arrow[dl] \\
& B_j \arrow[ul] & & B_{j+1} \arrow[ul] & & & & B_i \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

(各 B_k は、 $B_k = \mathcal{H}^k_{\mathcal{A}}(E)[-k] \in \mathcal{A}[-k]$ をみたす。)

$A_1 := B_j,\ A_2 := B_{j+1},\ \cdots,\ A_{i-j+1} = B_j$ とおけば、

$$\begin{array}{ll}
A_1 \in \mathcal{A}[-j], & k_1 = -j \\
& \quad \vee \\
A_2 \in \mathcal{A}[-j-1], & k_2 = -j-1 \\
& \quad \vee \\
\quad \vdots & \quad \vdots \\
& \quad \vee \\
A_{i-j+1} \in \mathcal{A}[-i] & k_{i-j+1} = -i
\end{array}$$

[⇐]

$$\mathcal{D}^{\le 0} := \left\{ E \in \mathcal{D} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists!\, k_1 > k_2 > \cdots > k_m \geq 0 \\ \exists!\ \begin{tikzcd}[column sep=small] 0 = E_0 \arrow[rr] & & E_1 \arrow[r] \arrow[dl] & \cdots \arrow[r] & E_{m-1} \arrow[rr] & & E_m = E \arrow[dl] \\ & A_1 \arrow[ul] & & & & A_m \arrow[ul] & \end{tikzcd} \\ \text{s.t. } \forall j,\ A_j \in \mathcal{A}[k_j]. \end{array} \right\}$$

← (lem より) 同型を除いて 一意

$$\mathcal{D}^{\ge 0} := \left\{ E \in \mathcal{D} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists!\, 0 \geq k_1 > k_2 > \cdots > k_m \\ \exists!\ \begin{tikzcd}[column sep=small] 0 = E_0 \arrow[rr] & & E_1 \arrow[r] \arrow[dl] & \cdots \arrow[r] & E_{m-1} \arrow[rr] & & E_m = E \arrow[dl] \\ & A_1 \arrow[ul] & & & & A_m \arrow[ul] & \end{tikzcd} \\ \text{s.t. } \forall j,\ A_j \in \mathcal{A}[k_j] \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{D}^{\le 0} \cap \mathcal{D}^{\ge 0} = \left\{ E \in \mathcal{D} \;\middle|\; \begin{tikzcd}[column sep=small] 0 \arrow[rr] & & E \arrow[dl] \\ & A \arrow[ul, "+1"] & \end{tikzcd},\ A \in \mathcal{A} \right\} \cong \mathcal{A}.$$

以下、 $(\mathcal{D}^{\le 0}, \mathcal{D}^{\ge 0})$ が bounded t-structure であることを示す。

Claim 1

$$\mathcal{D}^{\leq -1} = \mathcal{D}^{\leq 0}[1] \subset \mathcal{D}^{\leq 0} \qquad (\Leftrightarrow \ \mathcal{D}^{\leq 0} \subset \mathcal{D}^{\leq 1})$$

$$\mathcal{D}^{\geq 0}[1] = \mathcal{D}^{\geq -1} \subset \mathcal{D}^{\geq 0} \qquad (\Leftrightarrow \ \mathcal{D}^{\geq 1} \subset \mathcal{D}^{\geq 0})$$

(∵)

$0 \neq E \in \mathcal{D}^{\leq 0}$ をとると，定め方から

$$\exists \quad \begin{tikzcd}
0 = E_0 \arrow[rr] & & E_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E_{n-1} \arrow[rr] & & E_n = E \\
& A_1 \arrow[ul] \arrow[ur, phantom, "\triangledown"] & & & & A_n \arrow[ul] \\
& A[k_1] \arrow[u, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] & & & & A[k_n] \arrow[u, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"]
\end{tikzcd}$$

s.t. $k_1 > k_2 > \cdots > k_n \geq 0$

$E[1]$ を考えると，

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & E_{i-1}[1] \arrow[rr] & & E_i[1] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E_{n-1}[1] \arrow[rr] & & E_n[1] = E[1] \\
& & A_i[1] =: A_i' \arrow[ul] & & A_{n-1}[1] =: A_{n-1}' \arrow[ur] & & A_n[1] =: A_n' \arrow[ul] \\
& & A[k_i+1] =: A[k_i'] \arrow[u, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] & & A[k_{n-1}+1] =: A[k_{n-1}'] \arrow[u, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] & & A[k_n+1] =: A[k_n'] \arrow[u, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"]
\end{tikzcd}$$

$A_i' \neq 0$ のとき，$k_i' = k_i + 1 \geq 1 > 0$ $\therefore$ $E[1] \in \mathcal{D}^{\leq 0}$

$E \in \mathcal{D}^{\leq 0}$ は任意にとれるので，$\mathcal{D}^{\leq 0}[1] \subset \mathcal{D}^{\leq 0}$．他も同様．

▲

Rem

$$\mathcal{D}^{\leq -1} = \left\{ E \in \mathcal{D} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists!\, k_1 > k_2 > \cdots > k_m \geq 1 \\ \exists!\, \begin{tikzcd}[column sep=small] 0 = E_0 \arrow[rr] & & E_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E_{m-1} \arrow[rr] & & E_m = E \\ & A_1 \arrow[ul] & & & & A_m \arrow[ul] \end{tikzcd} \\ \text{s.t. } \forall j,\ A_j \in A[k_j]. \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{D}^{\le n} = \left\{ E \in \mathcal{D} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists!\, k_1 > k_2 > \cdots > k_m \ge -n \\ \exists!\; \begin{tikzcd}[column sep=small] 0 = E_0 \arrow[r] & E_1 \arrow[r] \arrow[dl] & \cdots \arrow[r] & E_m = E \arrow[dl] \\ A_1 \arrow[u, dashed] & & A_m \arrow[u, dashed] & \end{tikzcd} \\ \text{s.t. } \forall j,\ A_j \in \mathcal{A}[k_j]. \end{array} \right\}$$

Claim 2

$\mathcal{D}^{\ge 1} \subset (\mathcal{D}^{\le 0})^{\perp}$

∵ 次を思い出す.

Lem 2.13

任意の完全三角 $E \to F \to G \xrightarrow{+1} E[1]$ in $\mathcal{D}$ と $M \in \mathcal{D}$ に対し,

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(M, E) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(M, F) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(M, G)$ は完全.

($\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E, M)$ 〃)

これにより, $E, G \in (\mathcal{D}^{\le 0})^{\perp}$ ならば,

$E \to F \to G \xrightarrow{+1}$ dist. tri. をみたす $F \in \mathcal{D}$ についても $F \in (\mathcal{D}^{\le 0})^{\perp}$.

$F \in \mathcal{D}^{\ge 1}$ を任意にとる. $F \in (\mathcal{D}^{\le 0})^{\perp}$ を示す.

(i) F の長さが 1 のとき.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & F \arrow[dl] \\ B_1 \arrow[u, dashed] & \end{tikzcd}$$ より. $F \simeq B_1 \in \mathcal{A}[l_1]$ s.t. $0 > l_1$

$\forall E \in \mathcal{D}^{\le 0}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E, F) = 0$ を示す.

(ア) E の長さも 1 のとき.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \arrow[dl] \\ A_1 \arrow[u, dashed] & \end{tikzcd}$$ より, $E \simeq A_1 \in \mathcal{A}[k_1]$ s.t. $k_1 \ge 0$ $(> l_1)$ なので.

1つ目の仮定より $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E, F) = 0$.

(イ) Eの長さ $m>1$ のとき

mまで OK として $m+1$ のとき。

$$E_m \to E \to A_{m+1} \xrightarrow{+1} \quad \text{dist. tri.}$$

s.t. $A_{m+1} \in \mathcal{A}[k_{m+1}]$, $k_m > k_{m+1} \geq 0$.

今、

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A_{m+1}, F) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E, F) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E_m, F)$$

が完全で、(ア)より $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A_{m+1}, F)=0$, 仮定より $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E_m, F)=0$.

$\therefore \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E, F)=0$. $\therefore$ (ア)(イ)より $F \in (\mathcal{D}^{\leq 0})^{\perp}$.

(ii) Fの長さ $n>0$ のとき.

nまで OK と仮定して $n+1$ のとき.

$$F_n \to F \to B_{n+1} \xrightarrow{+1} \quad \text{dist. tri.}$$

s.t. $B_{n+1} \in \mathcal{A}[l_{n+1}]$, $0 > l_{n+1}$

仮定より $F_n \in (\mathcal{D}^{\leq 0})^{\perp}$. (i) より $B_{n+1} \in (\mathcal{D}^{\leq 0})^{\perp}$

$\therefore F \in (\mathcal{D}^{\leq 0})^{\perp}$

以上により $\mathcal{D}^{\geq 1} \subset (\mathcal{D}^{\leq 0})^{\perp}$.

Rem

より強く $\mathcal{D}^{\geq 1} = (\mathcal{D}^{\leq 0})^{\perp}$

∵ $(\mathcal{D}^{\leq 0})^{\perp} \subset \mathcal{D}^{\geq 1}$ を示す.

$\forall F \in (\mathcal{D}^{\leq 0})^{\perp}$ は

$\forall E \in \mathcal{D}^{\leq 0}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E, F) = 0$ をみたす

もし. $F \notin \mathcal{D}^{\geq 1}$ なら.

$\exists\ k_1 > k_2 > \cdots > k_i \geq 0 > k_{i+1} > \cdots > k_n$

s.t.

$$\begin{tikzcd}
F_0 = 0 \arrow[rr] & & F_1 \arrow[r] \arrow[dl] & \cdots \arrow[rr] & & F_i \arrow[rr] \arrow[dl] & & F_{i+1} \arrow[r] \arrow[dl] & \cdots \arrow[rr] & & F_n = F \arrow[dl] \\
& B_1 \arrow[ul] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & & & B_i \arrow[ul] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & & B_{i+1} \arrow[ul] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & & & B_n \arrow[ul] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & \\
& A[k_1] & & & A[k_i] & & A[k_{i+1}] & & & A[k_n] &
\end{tikzcd}$$

このとき. $E \in \mathcal{D}^{\leq 0}$ として F_i をとると. $(F_i \xrightarrow{\iota} F \to \mathrm{Cone}(\iota) \xrightarrow{+1})$

$$\mathrm{Hom}(F_i, F_i) \to \mathrm{Hom}(F_i, F) \to \mathrm{Hom}(F_i, \mathrm{Cone}(\iota)) \quad \text{exact}$$

$$\mathrm{id} \longmapsto \iota$$

$\mathrm{Hom}(F_i, F) \neq 0$ となり矛盾. $\therefore\ F \in \mathcal{D}^{\geq 1}$

□

Claim 3

$^\forall E \in \mathcal{D}$, $\exists\ F \to E \to G \xrightarrow{+1}$ in $\mathcal{D}$

s.t. $F \in \mathcal{D}^{\leq 0}$, $G \in \mathcal{D}^{\geq 1}$

$\because$ 仮定より $\exists!\ k_1 > \cdots > k_n \quad (\in \mathbb{Z})$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\exists!\ 0 = E_0 \arrow[rr] & & E_1 \arrow[dl] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E_i \arrow[rr] \arrow[dl] & & E_{i+1} \arrow[dl] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E_{n-1} \arrow[rr] & & E_n = E \arrow[dl] \\
& A_1 \arrow[ul] \arrow[u, phantom, "\triangledown"] & & A_i \arrow[ul] & & A_{i+1} \arrow[ul] & & & & A_n \arrow[ul] \\
\text{s.t.} & \mathcal{A}[k_1] \arrow[u, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] & & \mathcal{A}[k_i] \arrow[u, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] & & \mathcal{A}[k_{i+1}] \arrow[u, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] & & & & \mathcal{A}[k_n] \arrow[u, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"]
\end{tikzcd}$$

場合分け

(i) $k_1 > k_2 > \cdots > k_i \geq 0 > k_{i+1} > \cdots > k_n$

(ii) $0 \geq k_1 > \cdots > k_n$

(iii) $k_1 > k_2 > \cdots > k_n \geq 0$

(i) のとき. $F := E_i$ とおくと.

$$F \xrightarrow{\iota} E \to \mathrm{Cone}(\iota) \xrightarrow{+1}$$

s.t. $F \in \mathcal{D}^{\leq 0}$, $\mathrm{Cone}(\iota) =: G \in (\mathcal{D}^{\leq 0})^{\perp} = \mathcal{D}^{\geq 1}$

Claim2 と同じ手法

(ii) のとき. $E \simeq G$, $F = 0$.

(iii) のとき. $E \simeq F$, $G = 0$.

Claim 4

$(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ は 有界な t-structure.

(証)

$$\mathcal{D} = \bigcup_{i,j\in\mathbb{Z}} (\mathcal{D}^{\leq i} \cap \mathcal{D}^{\geq j})$$ を示す.

[⊃] は 明.

[⊂] について. $\forall E \in \mathcal{D}$, $\exists K_1, K_n \in \mathbb{Z}$

s.t. $E \in \mathcal{D}^{\leq -K_n} \cap \mathcal{D}^{\geq -K_1}$

ここで. $K_1, K_n \in \mathbb{Z}$ は. 条件により E に対して存在する整数列

$K_1 > \cdots > K_n$ の中で 最大のものと 最小のもの であり.

であり. Claim 2 の Rem から,

$$\mathcal{D}^{\leq -K_n} = \left\{ E \in \mathcal{D} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists!\, k_1 > k_2 > \cdots > k_m \geq K_n \\ \exists!\, 0 = E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_m = E \\ \quad (A_1, \ldots, A_m) \\ \text{s.t. } \forall j,\ A_j \in \mathcal{A}[k_j]. \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{D}^{\geq -K_1} = \left\{ E \in \mathcal{D} \;\middle|\; \begin{array}{l} K_1 \geq^{\exists!} k_1 > \cdots > k_n \\ \exists!\, 0 = E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_m = E \\ \quad (A_1, \ldots, A_m) \\ \text{s.t. } \forall j,\ A_j \in \mathcal{A}[k_j]. \end{array} \right\}$$

[Proof of 7.7(ii)]

$$\Psi : K(\mathcal{D}) \longrightarrow K(\mathcal{A})$$
$$[E] \longmapsto \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \, [\mathcal{H}^i_{\mathcal{A}}(E)]$$

と定める.

① Ψ は well-defined.

$[E] = [F] \in K(\mathcal{D})$ なら $\forall i$, $\mathcal{H}^i_{\mathcal{A}}(E) = \mathcal{H}^i_{\mathcal{A}}(F)$.

$\therefore$ $\Psi([E]) = \Psi([F])$.

② Ψ は群準同型.

$\mathcal{D}$ で dist. tri.

$$E \to F \to G \xrightarrow{+1} E[1]$$ があれば.

$\mathcal{H}^i_A(-)$ が cohomological functor なので.

$$\cdots \to \mathcal{H}^i_{\mathcal{A}}(E) \to \mathcal{H}^i_{\mathcal{A}}(F) \to \mathcal{H}^i_{\mathcal{A}}(G)$$
$$\to \mathcal{H}^{i+1}_{\mathcal{A}}(E) \to \mathcal{H}^{i+1}_{\mathcal{A}}(F) \to \mathcal{H}^{i+1}_{\mathcal{A}}(G) \to \cdots$$

は $\mathcal{A}$ での exact 列.

よって、

$$\Psi([F]) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i [\mathcal{H}^i_{\mathcal{A}}(F)]$$
$$= \sum (-1)^i \{[\mathcal{H}^i_{\mathcal{A}}(E)] + [\mathcal{H}^i_{\mathcal{A}}(G)]\}$$
$$= \Psi([E]) + \Psi([G]).$$

③ Ψ は全単射で、逆写像も群準同型。

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & K(\mathcal{A}) & \longrightarrow & K(\mathcal{D}) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & [E] & \longmapsto & [E] \end{array}$$

とおく。φ は明らかに群準同型。

$\Psi\circ\varphi = \mathrm{id}$, $\varphi\circ\Psi = \mathrm{id}$ を示すためには、$K(\mathcal{D})$ で

$[E] = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i [\mathcal{H}^i_{\mathcal{A}}(E)]$ を示せばよい。

(i) $E \in \mathcal{D}^{\le m} \cap \mathcal{D}^{\ge m}$ のとき

このとき、$E = \mathcal{H}^i_{\mathcal{A}}(E)[-m]$ なので、

$$[E] = [\mathcal{H}^i_{\mathcal{A}}(E)[-m]] = (-1)^m [\mathcal{H}^i_{\mathcal{A}}(E)]$$ となり ok.

(一般に、$X \to X \to 0 \to X[1]$ が dist. tri なので、
$[X] = -[X[1]]$)

(ii) 一般の $E \in \mathcal{D}$ について

$\mathcal{A}$ は bounded t-structure なので $\mathcal{D} = \bigcup_{i,j \in \mathbb{Z}} (\mathcal{D}^{\leq i} \cap \mathcal{D}^{\geq j})$

$m \geq n$ として、$E \in \mathcal{D}^{\leq m} \cap \mathcal{D}^{\geq n}$ とする。

n を固定して、m に関する帰納法で示す。

$n = m$ のときは (i) と同じなので、$m > n$ とする。

また、$m-1$ まで主張が正しいとする。

$$\tau_{\leq m-1}(E) \to E \to \tau_{\geq m}(E) \xrightarrow{+1}$$

$$\left(\tau_{\leq m-1}(E) \in \mathcal{D}^{\leq m-1} \cap \mathcal{D}^{\geq n}, \quad \tau_{\geq m}(E) = \mathcal{D}^{\leq m} \cap \mathcal{D}^{\geq m} \right)$$

なる dist. tri. があり、$\tau_{\leq m-1}(E)$ については仮定より

$$[\tau_{\leq m-1}(E)] = \sum_{i=n}^{m-1} (-1)^i [\mathcal{H}^i_{\mathcal{A}}(\tau_{\leq m-1}(E))]$$
$$= \sum_{i=n}^{m-1} (-1)^i [\mathcal{H}^i_{\mathcal{A}}(E)]$$

$\tau_{\geq m}(E)$ についても、(i) より

$$[\tau_{\geq m}(E)] = (-1)^m [\mathcal{H}^m_{\mathcal{A}}(E)]$$

$$\therefore \quad [E] = [\tau_{\leq m-1}(E)] + [\tau_{\geq m}(E)]$$
$$= \sum_{i=n}^{m-1} (-1)^i [\mathcal{H}^i_{\mathcal{A}}(E)] + (-1)^m [\mathcal{H}^i_{\mathcal{A}}(E)]$$
$$= \sum_{i=n}^{m} (-1)^i [\mathcal{H}^i_{\mathcal{A}}(E)]$$

$\square$