§5.6 普遍層による導来同値

X : connected smooth projective variety

$M := M_\omega(v)$: Gieseker 安定層のモジュライ空間.

このとき. $X \times M$ 上に 普遍層

$$\mathcal{E} \in \mathrm{Coh}(X \times M)$$

が存在. $\mathcal{E}$ は.

各 $y = [E] \in M$ に対して

$$\mathcal{E}_y = \mathcal{E}|_{X \times \{y\}} \simeq E.$$ をみたす.

($\mathcal{E}_y$ が y に対応する X 上の連接層を与える)

Thm 5.33

先程の状況で、次の2条件を仮定する:

$$\begin{cases} \text{(i)} & M \text{ は、 } \dim M = \dim X \\ & \text{となる smooth projective variety} \\ \text{(ii)} & \forall y_1, y_2 \in M \text{ s.t. } y_1 \neq y_2 \\ & , \quad \mathbb{R}\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_{y_1}, \mathcal{E}_{y_2}) = 0. \end{cases}$$

このとき、Fourier-Mukai 函手

$$\Phi^{\mathcal{E}}_{M \to X} : D^b(M) \longrightarrow D^b(X)$$

は fully-faithful. また、

$$\forall y \in M, \quad \mathcal{E}_y \otimes \omega_X \cong \mathcal{E}_y$$

ならば、$\Phi^{\mathcal{E}}_{M \to X}$ は三角圏としての圏同値を与える。

Rem

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{E} \arrow[d] & \\
 & M \times X \arrow[dl, "\pi_M"'] \arrow[dr, "\pi_X"] & \\
\mathcal{F} \arrow[r, phantom, "\curvearrowright"] M & & X \arrow[r, phantom, "\curvearrowleft"] \Phi(\mathcal{F})
\end{tikzcd}
$$

$$\Phi^{\mathcal{E}}_{M\to X}(\mathcal{F}) = \mathbb{R}\pi_{X*}\left(\mathcal{E} \overset{L}{\otimes} \pi_M^{*}\mathcal{F}\right)$$

であり、 $\Phi := \Phi^{\mathcal{E}}_{M\to X}$ は、 右随伴、左随伴 を持つ

$$\begin{cases} \Phi^{L} := \Phi^{\mathcal{E}^{L}}_{X\to M}, & \mathcal{E}^{L} = \mathcal{E}^{\vee} \overset{L}{\otimes} \pi_X^{*}\omega_X\,[\dim X]. \\ \Phi^{R} := \Phi^{\mathcal{E}^{R}}_{X\to M}, & \mathcal{E}^{R} = \mathcal{E}^{\vee} \overset{L}{\otimes} \pi_M^{*}\omega_M\,[\dim M]. \end{cases}$$

これらには、 自然変換

$$\begin{cases} \eta : \Phi^{L}\circ\Phi \longrightarrow \mathrm{id} \\ \epsilon : \mathrm{id} \longrightarrow \Phi^{R}\circ\Phi \end{cases}$$

が存在.

Lem 5.34

X : smooth projective variety of $\dim X = d$.
$E \in D^b(X)$.

$\mathcal{H}om^i_X(E, \mathcal{O}_x) = 0$ が、
任意の $i \in \mathbb{Z}$, $x \neq x_0$. で成立し、
また、$i \notin [0, d]$, $x = x_0$ でも成立するなら、

E は、$\mathrm{Supp}(E) = \{x_0\}$ なる連接層.

(:)

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Hom}^p(\mathcal{H}^{-q}(E|_{X \setminus \{x_0\}}), \mathcal{O}_x)$$
$$\Rightarrow \mathrm{Hom}^{p+q}(E|_{X \setminus \{x_0\}}, \mathcal{O}_x)$$

より、$x \neq x_0$ なる $\forall q \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{H}^{-q}(E|_{X \setminus \{x_0\}}) = 0$
$\therefore$ $E|_{X \setminus \{x_0\}} = 0$.
($\{\mathcal{O}_x\}$ が spanning class)

従って、すべてのコホモロジー層 $\mathcal{H}^i(E)$ は、
$$\mathrm{Supp}\, \mathcal{H}^i(E) = \{x_0\}$$
をみたす.

$$E_2^{0,q} = \mathrm{Hom}(\mathcal{H}^{-q}(E), \mathcal{O}_{x_0}) \Rightarrow \mathrm{Hom}^q(E, \mathcal{O}_{x_0})$$

より、$\mathcal{H}^{-q}(E) \neq 0 \Rightarrow E_2^{0,q} \neq 0$.

また、Serre duality により

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}^d(\mathcal{H}^{-q}(E), \mathcal{O}_{x_0}) \\
\cong\ &\mathrm{Hom}(\mathcal{H}^{-q}(E), \mathcal{O}_{x_0} \otimes \omega_X[\dim X]) \\
\cong\ &\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{x_0}, \mathcal{H}^{-q}(E))^\vee \neq 0.
\end{aligned}$$

なので、$E_2^{d,q} \neq 0$.

そこで、$\begin{cases} q_1 := \min\{q \in \mathbb{Z} \mid \mathcal{H}^{-q}(E) \neq 0\} \\ q_2 := \mathrm{Max}\{q \in \mathbb{Z} \mid \mathcal{H}^{-q}(E) \neq 0\} \end{cases}$

とおくと。

スペクトル系列が E_2^{0,q_1}, E_2^{d,q_2} 項で退化するため、

$$0 \neq E_2^{0,q_1} \cong E_3^{0,q_1} \cong \cdots \cong E_\infty^{0,q_1} \quad (\mathrm{Hom}^{q_1}(E, \mathcal{O}_{x_0}))$$

$$0 \neq E_2^{d,q_2} \cong E_3^{d,q_2} \cong \cdots \cong E_\infty^{d,q_2} \quad (\mathrm{Hom}^{d+q_2}(E, \mathcal{O}_{x_0}))$$

$$\therefore \quad \begin{cases} q_1 \geqq 0. \\ d \geqq q_2 + d. \end{cases}$$

$q_1 \leq q_2$ なので、 $0 \leqq q_1 \leq q_2 \leqq 0$ $\therefore$ $q_1 = q_2 = 0$.

$\therefore$ E は $\{x_0\}$ に Support を持つ 0 次元の連接層 $\square$

(Proof of Thm 5.33)

Step 1

$\forall y \in M,$

$$\eta(\mathcal{O}_y) : \Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_y$$

$\because$

$$\Phi(\mathcal{O}_y) = \mathbb{R}\pi_{X*}(\mathcal{E} \overset{L}{\otimes} \pi_M^* \mathcal{O}_y) = \mathcal{E}_y$$

であり. 任意の $z \in M$ に対して.

$$\mathrm{Hom}^i_M(\Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_y), \mathcal{O}_z) \cong \mathrm{Hom}^i_X(\Phi(\mathcal{O}_y), \Phi(\mathcal{O}_z)) = \mathrm{Hom}^i_X(\mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z)$$

仮定

「$\forall y_1, y_2 \in M,\ y_1 \neq y_2 \Rightarrow \mathbb{R}\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_{y_1}, \mathcal{E}_{y_2}) = 0$」

より. "$z \neq y$" or "$z = y$ かつ $i \notin [0, \dim M]$" のとき.

$$\mathrm{Hom}^i_X(\mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z) = 0.$$

よって. (Lem 5.34) より. $\mathrm{Supp}(\Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_y)) = \{y\}$

$\uparrow$

$\mathrm{Coh}(M)$.

よって、射 $\eta(\mathcal{O}_x) : \Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_x) \to \mathcal{O}_x$ は全射。

$$\therefore \quad 0 \to \underset{\substack{\parallel \\ \ker(\eta(\mathcal{O}_x))}}{G} \to \Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_x) \xrightarrow{\eta(\mathcal{O}_x)} \mathcal{O}_x \to 0. \quad (\mathrm{ex}) \quad \text{—①}$$

(例 3.11 (i))

主張を得るために、$G = 0$ を示す。

$\Omega = \{\mathcal{O}_x \mid x$ は M の閉点$\}$ は $D^b(M)$ の閉点

よって、 $\mathrm{Hom}(G, \mathcal{O}_x) = 0$ を見ればよい。

(Ω が D のスパニング類であるとは
$\langle \Omega \rangle^\perp = {}^\perp\langle \Omega \rangle = 0$ をみたすこと。)

① に $\mathrm{Hom}(-, \mathcal{O}_x)$ を施して、

$$\mathrm{Ext}^1_M(\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_x) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_M(\Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_x), \mathcal{O}_x)$$

が単射であることを示す。

$$\begin{cases} \mathrm{Ext}^1_M(\mathcal{O}_z, \mathcal{O}_z) \simeq T_z M \\ \mathrm{Ext}^1_M(\Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_z), \mathcal{O}_z) \simeq \mathrm{Ext}^1_M(\mathcal{E}_z, \mathcal{E}_z) \end{cases}$$

$$\left(\mathrm{Ext}^1_M(\mathcal{O}_z,\mathcal{O}_z) \simeq\right) \quad T_z M \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_M(\mathcal{E}_z, \mathcal{E}_z)$$

が単射を調べることになる.

$$0 \to \mathcal{O}_z \to \mathcal{O}_{Z_v} \to \mathcal{O}_z \to 0.$$

$M \times X$ に引き戻して $\otimes \mathcal{E}$

$$\rightsquigarrow \quad 0 \to \mathcal{E}_z \to \mathcal{E}|_{Z_v \times X} \to \mathcal{E}_z \to 0.$$

この対応は単射. (Kodaira-Spencer 写像).
(lem 5.25 を参照)

よって、 $G = \ker(\eta(\mathcal{O}_z)) = 0$

$\therefore \quad \eta(\mathcal{O}_z) : \Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_z) \longrightarrow \mathcal{O}_z$

は同型.

$\square$

Step 2

函手 Φ は充満忠実.

(∵)

Lem 3.5 (ii) (下のもの) より.

$\forall F \in D^b(X)$,

$$\epsilon(F) : F \xrightarrow{\sim} \Phi^R \circ \Phi(F)$$

を示す.

Rem - Lem 3.5 (ii)

函手 $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が右随伴 Φ^R を持つとき.

「Φ が充満忠実である」ことと.

「$\epsilon : id_{\mathcal{C}} \to \Phi^R \circ \Phi$ が同型である」ことは同値

(Φ^L も同様)

exact tri.

$$G' \to F \to \Phi^R \circ \Phi(F)$$

をとり. $\mathbb{R}\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_3, -)$ を施すと.

exact. tri.

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_z, G') \to \mathbb{R}\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_z, F) \xrightarrow{\epsilon(F)\circ} \mathbb{R}\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_z, \Phi^R \circ \Phi(F)) \tag{5.20}$$

を得る.

Φ^L や Φ^R の随伴性から

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_z, \Phi^R \circ \Phi(F)) \\ \cong\ &\mathbb{R}\mathrm{Hom}(\Phi(\mathcal{O}_z), \Phi(F)) \\ \cong\ &\mathbb{R}\mathrm{Hom}(\Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_z), F) \\ \cong\ &\mathbb{R}\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_z, F) \end{aligned}$$

Step 1

$\Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_z) \cong \mathcal{O}_z$

よって, (5.20) の $\epsilon(F)\circ$ は 同型 なので,

$\forall z \in M,\quad \mathbb{R}\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_z, G') = 0.$

$\Omega = \{\mathcal{O}_z \mid z \text{ は } M \text{ の閉点}\}$ は spanning class

$\therefore\ G' = 0$ で $\epsilon(F)$ は 同型.

$\therefore\ \Phi$ は 充満忠実

(fully-faithful) □

Step 3

さらに、

$$\mathcal{E}_y \otimes \omega_X \cong \mathcal{E}_y$$

がすべての $y \in M$ で成り立つなら Φ は圏同値。

$\because$

(Thm 3.18) を用いる。

Thm 3.18

$\mathcal{C}$: 非自明な三角圏

$\mathcal{D}$: 直既約な三角圏

Ω : $\mathcal{C}$ のスパニング類

「$\forall \omega \in \Omega$, $\Phi \circ S_{\mathcal{C}}(\omega) \cong S_{\mathcal{D}} \circ \Phi(\omega)$」

が成り立つとき、Φ は三角圏の同値を与える。

$$\Phi(S_{D^b(M)}(\mathcal{O}_y)) \cong \Phi(\mathcal{O}_y \otimes \omega_M[\dim M])$$

$\mathcal{O}_y \otimes \omega_M \cong \mathcal{O}_y$

(∵ stalk をとると.

$k(y) \otimes \omega_{M,y}/m_y\omega_{M,y} \cong k(y)$)

$$\cong \Phi(\mathcal{O}_y[\dim M])$$
$$\cong \mathcal{E}_y[\dim M]$$
$$\cong \mathcal{E}_y \otimes \omega_X[\dim X]$$
$$\cong S_{D^b(X)}(\mathcal{E}_y)$$
$$= S_{D^b(X)}(\Phi(\mathcal{O}_y))$$

よって. $\Phi \circ S_{D^b(M)}(\mathcal{O}_y) \cong S_{D^b(X)} \circ \Phi(\mathcal{O}_y)$

がすべての $\mathcal{O}_y \in \Omega$ で成り立つので. Φ は同値

□

Rem (アーベル多様体. [Muk 81] の結果)

A : アーベル多様体.

$\hat{A} \cong \mathrm{Pic}^0(A)$: 双対アーベル多様体.

$\left(\hat{A} := H^1(A, \mathcal{O}_A)/H^1(A, \mathbb{Z})\right)$.

P : fine moduli sp. $\mathrm{Pic}^0(A)$ に付随した普遍束 (ポアンカレ束)

- $\alpha \in \mathrm{Pic}^0(A)$ に対し. $P|_{\{\alpha\}\times A} \simeq \mathcal{L}_\alpha$
  ここで $\mathcal{L}_\alpha$ は α に対応する line bdl.
- $e \in A$ を加法の零元として. $P|_{\hat{A}\times\{e\}} \cong \mathcal{O}_{\hat{A}}$

Thm 2.54 (Muk'81)

Fourier-Mukai 函手

$$\Phi^{P}_{\hat{A}\to A} : D^b(\hat{A}) \longrightarrow D^b(A)$$

は三角圏の同値を与える.

∵ (Thm 5.33) を用いる.

$\dim A = \dim \hat{A}$, $\omega_A \cong \mathcal{O}_A$ より.

同型でない $L_1, L_2 \in \mathrm{Pic}^0(A)$ に対して,

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om(L_1, L_2) = 0$$

が示せればよい. これは,

「$\forall L \in \mathrm{Pic}^0(A) \setminus \{\mathcal{O}_A\}$, $i \in \mathbb{Z}$.

$$H^i(A, L) = 0.$$」

と同値.

これは. [Mumford Abelian Varieties Ch.2-§8.(vii)]
などにある. (Abelian Varieties の勉強ノート参照)

□

Thm 5.35

X, Y : smooth projective varieties.

Fourier-Mukai 函手
$$\Phi : D^b(X) \longrightarrow D^b(Y)$$

を考える. このとき. 次が成立.

(i) Φ が fully-faithful であることと.

$\forall x_1, x_2 \in X$,
$$\mathrm{Hom}^i(\Phi(\mathcal{O}_{x_1}), \Phi(\mathcal{O}_{x_2})) = \begin{cases} \mathbb{C} & \begin{pmatrix} x_1 = x_2 \\ \text{かつ} \\ i = 0 \end{pmatrix} \\ 0 & \begin{pmatrix} x_1 \neq x_2 \text{ または} \\ i \notin [0, \dim X] \end{pmatrix} \end{cases}$$

が成り立つことは同値.

(ii) Φ が fully-faithful とする. このとき.
Φ が 圏同値 であることと.
$$\forall x \in X, \quad \Phi(\mathcal{O}_x) \otimes \omega_Y \cong \Phi(\mathcal{O}_x)$$

が成り立つことは同値.

(-.-)

(i) Φ が fully-faithful なら,

$$\mathrm{Hom}^i(\Phi(\mathcal{O}_{x_1}), \Phi(\mathcal{O}_{x_2}))$$

$$\cong \mathrm{Hom}^i(\mathcal{O}_{x_1}, \mathcal{O}_{x_2}) = \begin{cases} \mathbb{C} & \left(\begin{array}{l} x_1 = x_2 \text{ かつ} \\ i = 0 \end{array}\right) \\ 0 & \left(\begin{array}{l} x_1 \neq x_2 \text{ または} \\ i \notin [0, \dim X] \end{array}\right) \end{cases}$$

逆向きについて.

- Φ の核が Y 上平坦なときは.

(Thm 5.33) とまったく同様.

- Φ の核が Y 上平坦でないとき.

$$\mathrm{Ext}^1_M(\mathcal{O}_y, \mathcal{O}_y) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_M(\Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_x), \mathcal{O}_x)$$

の単射性はすぐに分からない.

あとで示す.

(ii) Φ が同値なら (Lem 4.1) より $\dim X = \dim Y$.

このとき.

$$\Phi \circ S_{D^b(X)} (\mathcal{O}_x)$$

$\mathcal{O}_x \otimes \omega_X \cong \mathcal{O}_x$

$$= \Phi (\mathcal{O}_x \otimes \omega_X [\dim X])$$

$$\cong \Phi (\mathcal{O}_x) [\dim Y]$$

$$S_{D^b(Y)} \circ \Phi (\mathcal{O}_x)$$

$$\cong \Phi (\mathcal{O}_x) \otimes \omega_Y \ [\dim Y]$$

で, (問 3.7 (i)) より. Φ が同値なら.

$$\Phi \circ S_{D^b(X)} \cong S_{D^b(Y)} \circ \Phi.$$

$$\therefore \quad \Phi (\mathcal{O}_x) \otimes \omega_Y \cong \Phi (\mathcal{O}_x).$$

逆向きについて. ($\dim X = \dim Y$ なら Thm 3.18)

$E \in D^b(X)$, $x \in X$, $i \in \mathbb{Z}$ に対し.

$$\mathrm{Hom}^i(\mathcal{O}_x, \Phi^L(E)) \cong \mathrm{Hom}^{i+\dim Y - \dim X}(\mathcal{O}_x, \Phi^R(E))$$

(Thm 3.18 と同じ).

$\Omega = \{ \mathcal{O}_x \mid x \in X \}$ は スパニング類 なので,

$$\Phi^R(E) \cong 0 \Rightarrow \Phi^L(E) \cong 0$$

よって, (Prop 3.17) より Φ は 圏同値. □

Rem. Prop 3.17

$\mathcal{C}$: 非自明 な 三角圏.
$\mathcal{D}$: 直既約 な 三角圏

$E \in \mathcal{D}$ に対し,
「 $\Phi^R(E) \cong 0 \Rightarrow \Phi^L(E) \cong 0$ 」
が 成り立つとき, Φ は 三角圏の 圏同値.

[Thm 5.35 (i)　$\mathcal{E}$ が Y 上平坦でないとき]

(命 3.1 (iii)) より,

$$Q := \mathbb{R}\pi_{X\times X *}\left(\mathbb{L}\pi^*_{X\times Y}\mathcal{E} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathbb{L}\pi^*_{Y\times X}\mathcal{E}^L\right)$$

とおくと.　$\Phi^{\mathcal{E}}_{X\to Y}\circ\Phi^{\mathcal{E}^L}_{Y\to X} = \Phi^{Q}_{X\to X}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & X\times Y\times X \arrow[dll] \arrow[d] \arrow[drr] & & & \\
 & X\times Y \arrow[dl] \arrow[dr] & & X\times X & & Y\times X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
X & & Y & & Y & & X
\end{tikzcd}$$

(∵ $\mathrm{Hom}^i(\Phi^Q_{X\to X}(\mathcal{O}_x), \mathcal{O}_x)$
$\cong \mathrm{Hom}^i(\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_x)$
は $i \notin [0, \dim X]$ で 0.)

↓

$\Phi^Q_{X\to X}(\mathcal{O}_x)$ が各 $x \in X$ で層になることから.

Q は X 上平坦な層.　([Bridgeland 99 Lem 4.3])
(Huybrechts (Lem 3.31))

さらに,

$$(T_x X =)\ \mathrm{Ext}^1_{D^b(X)}(\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_x) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{D^b(X)}(\Phi^Q_{X\to X}(\mathcal{O}_x), \Phi^Q_{X\to X}(\mathcal{O}_x))$$

は 小平・スペンサー写像.

Lem (Bridgeland '99 Lem 5.2)

X : projective variety $/\mathbb{C}$

Q : $x \in X$ に台を持つ X 上の層. とする.

$$\mathrm{Hom}_X(Q, \mathcal{O}_x) = \mathbb{C}$$

が成り立つなら. Q は X の 0次元閉部分スキームの構造層.

∵ short exact sq.

$$0 \to P \xrightarrow{i} Q \xrightarrow{g} \mathcal{O}_x \longrightarrow 0 \qquad (\mathrm{ex.})$$

が存在. ここで. 全射でない層の間の射

$$f : \mathcal{O}_x \to Q$$

を考える.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_x \arrow[r, "j"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & P \arrow[r, "i"] & Q \end{tikzcd}$$

方針
(全射でない ⇒ $\exists j : \mathcal{O}_x \to P$ s.t. $f = i \circ j$.
かつ. $\dim H^0(X, P) < \dim H^0(X, Q)$
だから. 全射になる $f' : \mathcal{O}_x \to Q$ も存在する.)

$f : \mathcal{O}_X \to Q$: 全射でない. について.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_x \arrow[r, "f"] & Q \arrow[r, "\tilde{h}"] \arrow[dr, "h"'] & \mathrm{Coker}(f) \arrow[r] \arrow[d, "\exists\varphi"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] & 0. \\
& & \mathcal{O}_x &
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Coker}(f)$ の普遍性から

$$h \circ f = 0$$

となる 0 でない射 $h : Q \to \mathcal{O}_x$ が存在.

仮定 $\mathrm{Hom}_X(Q, \mathcal{O}_x) = \mathbb{C}$ より

h は g の定数倍.

$$\left(0 \to P \to Q \xrightarrow{g} \mathcal{O}_x \to 0 \quad \text{—①} \right)$$

$$\therefore \quad g \circ f = c\,(h \circ f) = 0.$$

① に $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_x, -)$ を施して. 次の exact sq. を得る.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_x, P) & \xrightarrow{i\circ} & \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_x, Q) & \xrightarrow{g\circ} & \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_x) \\
& & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
& & & f & \longmapsto & g \circ f
\end{array}$$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O}_X \arrow[dl, "j"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr] & \\ P \arrow[r, "i"'] & Q \arrow[r, "s"'] & \mathcal{O}_X \end{tikzcd}$$

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, P) \xrightarrow{i\circ} \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, Q) \xrightarrow{s\circ} \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, Q) & & \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ f & \longmapsto & s\circ f \end{array}$$

$s\circ f = 0$ より、 $f \in \mathrm{Ker}(s\circ) = \mathrm{Im}(i\circ)$

$\therefore \ \exists\, j \in \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, P)$ s.t. $f = i\circ j$

一方、 P, Q の台は $\{x\}$ で、

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(X, P) = \chi(P) < \chi(Q) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, Q)$$

ゆえに、全射であるような射

$$f' : \mathcal{O}_X \to Q$$

が存在する。 $\square$

$$(0 \to I_Z \to \mathcal{O}_X \to Q \to 0)$$

Lem (Bridgeland '99 Lem 5.3)

X : projective variety $/\mathbb{C}$.

S : variety (projective とは限らない)

Q を、S 上平坦な $S \times X$ 上の層であって、各 $s \in S$ について、Q_s が X の 0次元閉部分スキームの構造層であるようなもの、とする。

また、

$$\forall s_1, s_2 \in S,$$

$$Q_{s_1} \cong Q_{s_2} \Rightarrow s_1 = s_2$$

を仮定する。

このとき、Q に関する小平-スペンサー写像

$$(T_s S =) \operatorname{Ext}^1_{D^b(S)}(\mathcal{O}_s, \mathcal{O}_s) \to \operatorname{Ext}^1_{D^b(X)}(Q_{s_1}, Q_{s_2})$$

が単射になるような $s \in S$ が存在する。

S を Affine と仮定してよい.

$s \in S$ を固定.

$\pi : S \times X \to S$ を射影とする.

base-change thm (Hartshorne Ch.3 Thm 12.11) より

$$H^0(S \times X, Q) \longrightarrow H^0(X, Q_s)$$

は全射. なので.

$$g : \mathcal{O}_{S \times X} \longrightarrow Q \quad (\in H^0(S \times X, Q))$$

であって. $\{s\} \times X \subset S \times X$ への制限

$$g_s : \mathcal{O}_X \longrightarrow Q_s$$

が全射になるものが存在.

S のある open subset に制限して考えることで.

はじめから g が全射としてよい.

このとき. Q は $S \times X$ の閉部分スキームの構造層とみなせる.

$$\left(g : \mathcal{O}_{S \times X} \twoheadrightarrow Q = \mathcal{O}_{S \times X} / I_Z \right).$$

このとき、反変関手

$$\mathcal{H}ilb_X^P : (Sch/\mathbb{C}) \longrightarrow (Sets)$$
$$S \longmapsto \mathcal{H}ilb_X^P(S)$$

$$\mathcal{H}ilb_X^P(S) = \left\{ Z \subset X \times S \;\middle|\; \begin{array}{l} Z : X \times S \text{ の closed subscheme} \\ \begin{tikzcd} Z \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\pi"'] & X \times S \arrow[d, "p_2"] \\ & S \end{tikzcd} : \pi \text{ は flat} \end{array} \right\}$$

$P = \{Q_s \text{ の Hilbert 多項式}\}$
$(P_s(m) = \chi(\mathcal{O}_{Z_s} \otimes \mathcal{O}_X(m)))$

を考えると、$\mathcal{H}ilb_X^P$ を表現するスキーム $\mathrm{Hilb}^P(X)$ が存在する。

$\mathcal{E}$ を $\mathrm{Hilb}^P(X) \times X$ 上の普遍層とする。

このとき、$\exists f : S \to \mathrm{Hilb}^P(X)$
s.t. $Q = (f \times 1_X)^* \mathcal{E}$.

目的の小平スペンサー写像は、

$$\begin{tikzcd} T_s S \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & T_{f(s)} \mathrm{Hilb}^P(Y) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_{f(s)}, \mathcal{E}_{f(s)}) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} T_s S \arrow[r, "T_s(f)"] \arrow[rr, bend right] & T_{f(s)} \mathrm{Hilb}^P(Y) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_{f(s)}, \mathcal{E}_{f(s)}) \end{tikzcd}$$

仮定より. $f : S \to \mathrm{Hilb}^P(Y)$ は単射.

S' : f による S のスキーム論的像　とする,

$\mathbb{C}$ 上 (標数 0 の体上) で考えているので.
[Hartshorne Ch.3 (Cor 10.7)] より.

S, S' : 非特異
$f' : S \to S'$ は 滑らか.

としてよい.
f は単射で. f' の相対次元 0 なので.
$T_s(f)$ は すべての $s \in S$ で 単射

$$T_{f(s)} \mathrm{Hilb}^P(Y) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_{f(s)}, \mathcal{E}_{f(s)})$$

の単射性は. $\mathcal{E}$ の universality から従う

□

[単射性の証明]

$s \in S,\ S \subset X$ について、

Q_s $\left(:= \Phi^{Q}_{X \to X}(\mathcal{O}_s) \right)$ は $\{s\}$ に台を持つ層なので、

$$f : s \longmapsto Q_s$$

は単射。よって、$T_S(f)$ は単射。

よって、先程の2つのLemから、小平スペンサー写像は単射。