§ 5.5 安定層の局所変形理論

X : projective variety.

ω : X 上の ample line bdl.

$M_\omega(v)$: Gieseker-安定層のモジュライ空間.

(global)

- $M_\omega(v)$ の大域的構造を調べるのは難しい.

しかし,

(local)

- 与えられた点 $[E] \in M_\omega(v)$ の局所的構造を調べるなら, まだマシ.

$\longrightarrow$ 変形理論.

$[E] \in M_\omega(v)$ を固定.

$\mathcal{A}rt$: $\mathbb{C}$ 上の有限次元 Artin 局所環のなす圏.

として 反変函手

$$\mathrm{Def}_E : \mathcal{A}rt \longrightarrow \mathcal{S}ets$$

を次で定める:

$$\mathrm{Def}_E(R) := \left\{ (\mathcal{E}, \phi) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathcal{E} \in \mathrm{Coh}(X \times \mathrm{Spec}(R)) \text{ ; } R \text{上平坦} \\ \phi : \underbrace{R/\mathfrak{m}}_{(=\mathbb{C})} \otimes_R \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} E \end{array} \right\} \Big/ \simeq$$

ここで, $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}rt)$, $\mathfrak{m}$: R の極大 ideal.

$M_\omega(v)$ が存在するなら，定義より，函手の同型

$$\mathrm{Hom}(-, M_\omega(v)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_\omega(v)(-)$$

が存在．

Thm (Huybrechts-Lehn Thm 4.5.1 など)

上記の状況で，

$\hat{\mathcal{O}}_{M_\omega(v),[E]}$ を，$\mathcal{O}_{M_\omega(v)}$ の $[E]$ における完備化としたとき，$\hat{\mathcal{O}}_{M_\omega(v),[E]}$ は $\mathrm{Def}_E(-)$ を副表現する．
(pro-represent)

つまり，函手同型

$$\mathrm{Hom}(\hat{\mathcal{O}}_{M_\omega(v),[E]}, -) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Def}_E(-)$$

が存在する．

これを $\mathbb{C}[t]/(t^2)$ にあてはめると，

$$T_{[E]} M_\omega(v) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Def}_E(\mathbb{C}[t]/(t^2))$$

$$T_{[E]} M_\omega(v) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Def}_E\left(\mathbb{C}[t]/(t^2)\right)$$

Lem 5.23

自然な同一視

$$\left(T_{[E]} M_\omega(v) \simeq \right) \mathrm{Def}_E\left(\mathbb{C}[t]/(t^2)\right) \simeq \mathrm{Ext}^1_X(E,E)$$

が存在.

(っ)

$$\mathrm{Def}_E\left(\mathbb{C}[t]/(t^2)\right) = \left\{ (\mathcal{E},\phi) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathcal{E} \in \mathrm{Coh}(X \times \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[t]/(t^2))) \\ \mathcal{E} \text{ は } \mathbb{C}[t]/(t^2) \text{ 上平坦.} \\ \phi : \mathcal{E}|_{X\times\{0\}} \xrightarrow{\sim} E \end{array} \right\}$$

$(\mathcal{E},\phi) \in \mathrm{Def}_E\left(\mathbb{C}[t]/(t^2)\right)$ とすると. exact sq.

$$0 \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{\cdot t} \mathcal{O}_X[t]/(t^2) \longrightarrow \mathcal{O}_X \to 0$$

$$f \longmapsto f\cdot t$$

$$g + f\cdot t \longmapsto g$$

に $\mathcal{E}$ をテンソルして.

$$0 \to E \xrightarrow{\cdot t} \mathcal{E} \longrightarrow E \to 0$$

これは. $\mathrm{Ext}^1_X(E,E)$ の元を定める.

逆に、 $\eta \in \mathrm{Ext}^1_X(E,E)$ が与えられたとする。
η に対応する $\mathrm{Coh}(X)$ の exact sq.

$$0 \to E \xrightarrow{u} \mathcal{E} \xrightarrow{v} E \to 0$$

が存在する。

$\mathcal{E}$ の作用 $t : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ を、

合成 $\mathcal{E} \xrightarrow{v} E \xrightarrow{u} \mathcal{E}$ で与える。

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, "v"] \arrow[rr, bend right, "t"'] & E \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend left, "0"] & \mathcal{E} \arrow[r, "v"] \arrow[rr, bend right, "t"'] & E \arrow[r, "u"] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

なので、 $t^2 = 0$.

$\therefore \ \mathcal{E} \in \mathrm{Coh}(X \times \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[t]/(t^2)))$

$$\begin{cases} \bullet \ \mathcal{E} \text{ が } \mathbb{C}[t]/(t^2) \text{ 上平坦.} \\ \bullet \ \mathcal{E}|_X \overset{\phi}{\xrightarrow{\sim}} E. \end{cases}$$

$\because$ $t=0$ のとき、 $\mathcal{E}|_{t=0} \xrightarrow{\sim} E$.
$(u = \mathrm{id}, v = 0)$

なら、 $(\mathcal{E}, \phi) \in \mathrm{Def}_E(\mathbb{C}[t]/(t^2))$

□

Def

$\varphi : R' \twoheadrightarrow R$; Art における全射.

$\mathfrak{m}' \subset R'$: R' の極大 ideal.

$\mathrm{Ker}(\varphi) \cdot \mathfrak{m}' = 0$ が成立するとき,

φ を小拡大 (small extension) と呼ぶ.

(このとき, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ は $R'/\mathfrak{m}'$ - 加群となる.)

Prop 5.27

$\varphi : R' \twoheadrightarrow R$: Art の小拡大.

$I := \mathrm{Ker}(\varphi)$

$\mathcal{E} \in \mathrm{Def}_E(R)$ とする.

このとき, 障害類 (obstruction class) とよばれるクラス

$$o(\mathcal{E}) \in \mathrm{Ext}^2_X(E,E) \otimes_{\mathbb{C}} I$$

が存在して,

「 $o(\mathcal{E}) = 0 \iff \mathcal{E}$ が $\mathcal{E}' \in \mathrm{Def}_E(R')$ に拡張される」.

また, このとき, $\mathrm{Ext}^1_X(E,E) \otimes_{\mathbb{C}} I$ は $\mathcal{E}'$ に自由かつ推移的に作用する.

Rem

(Prop 5.27) は、$M_\omega(v)$ が非特異になる十分条件を与えている：

$$\mathrm{Def}_E(R) \simeq \mathrm{Hom}(\hat{\mathcal{O}}_{M_\omega(v),[E]}, R)$$

R を $\mathbb{C}[t]/(t^3)$, $\mathbb{C}[t]/(t^4)$, …, $\mathbb{C}[t]/(t^n)$, … とできる

このとき、$M_\omega(v)$ は $[E]$ で smooth. (cf. Le Potier Thm 8.1.6)

Cor 5.28

$^\forall [E] \in M_\omega(v)$,

$\mathrm{Ext}^2_X(E,E) = 0 \Rightarrow M_\omega(v)$ は smooth proj. var. ?

Ex 5.21

C : smooth proj. curve.

$M^s(r,d)$ は Projective

$M^s(r,d)$, r と d は互いに素について、

$\mathrm{Ext}^2_C(E,E) = 0$ for all $E \in \mathrm{Coh}(C)$

なので、$M^s(r,d)$ は smooth proj. variety.

[Proof of Prop 5.27]

一般の場合 [HL 2.A.6] resolution をとる

簡単のため、E を locally free sheaf とする。

$$\mathrm{Ext}^i_X(E,E) \cong H^i(X, \mathcal{E}nd(E))$$

で、右辺を Čech cohomology で表して計算する。

X の十分細かい Affine Open Covering $\{U_i\}_{1\le i\le N}$ をとると、

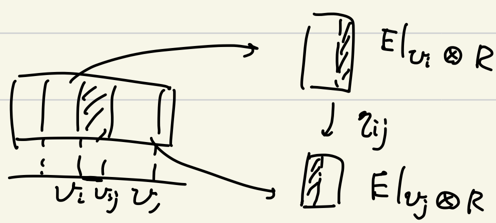
$\xi \in \mathrm{Def}_E(R)$ は、同型

$$\eta_{ij} : E|_{U_{ij}} \otimes_{\mathbb{C}} R \xrightarrow{\sim} E|_{U_{ij}} \otimes_{\mathbb{C}} R.$$

で、$\eta_{ij} \otimes_R R/m = \mathrm{id}$.

U_{ijk} 上で $\eta_{ij} \circ \eta_{jk} \circ \eta_{ki} = \mathrm{id}$ (cocycle 条件)

をみたすものとみなせる。



$$\begin{tikzcd}
E|_{U_{ij}} \otimes_{\mathbb{C}} R \arrow[r, "\eta_{ij}", "\sim"'] & E|_{U_{ij}} \otimes_{\mathbb{C}} R \\
E|_{U_{ij}} \otimes_{\mathbb{C}} R' \arrow[u, two heads, "\mathrm{id}\otimes\varphi"] \arrow[r, "\eta'_{ij}", "\sim"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & E|_{U_{ij}} \otimes_{\mathbb{C}} R' \arrow[u, two heads, "\mathrm{id}\otimes\varphi"']
\end{tikzcd}$$

U_{ij} 上では η_{ij} の R' への拡張 η'_{ij} をとれる。

(Iの分のパラメータを増やす)

η_{ij} が cocycle 条件をみたすので、U_{ijk} 上で

$$\eta'_{ij} \circ \eta'_{jk} \circ \eta'_{ki} = \mathrm{id} + o_{ijk}$$

$$(o_{ijk} \in \mathrm{End}(E|_{U_{ijk}}) \otimes I)$$

そこで $o(\mathcal{E}) := \{o_{ijk}\}_{ijk} \in \mathrm{Ext}^2_X(E,E) \otimes_{\mathbb{C}} I$

とおく。

$\mathcal{E}$ が $\mathcal{E}'$ に拡張する

$\Rightarrow$ η'_{ij} は cocycle 条件をみたす

$\Rightarrow$ $o(\mathcal{E}) = 0$.

逆に、 $o(\mathcal{E}) = \{o_{ijk}\}_{ijk} \in \mathrm{Ext}^2_X(E,E)\otimes_{\mathbb{C}} I$ が

$$o(\mathcal{E}) = 0$$

となるなら、

$$o_{ijk} = \vartheta_{ij} + \vartheta_{jk} + \vartheta_{ki}$$

と表せる。(coboundary) $\quad (\vartheta_{ij} \in \mathrm{End}(E(U_{ij}))\otimes_{\mathbb{C}} I)$

なので η'_{ij} を $\eta'_{ij} - \vartheta_{ij}$ に置き換えれば、この η'_{ij} が cocycle 条件

$$\eta'_{ij}\circ\eta'_{jk}\circ\eta'_{ki} = \mathrm{id}$$

をみたす。

また、この拡張は ϑ_{ij} の取り方で決まる。

$$\{\vartheta'_{ij}\}_{ij} \in \mathrm{Ext}^1_X(E,E)\otimes_{\mathbb{C}} I$$

と書いて

$$\eta'_{ij} \longmapsto \eta'_{ij} + \vartheta'_{ij}$$

なる作用を考えれば、$\mathrm{Ext}^1_X(E,E)\otimes_{\mathbb{C}} I$ が $\mathrm{Def}_E(R')$ の元に自由かつ推移的に作用する。 □

[具体的な計算]

$$0 \to I \to R' \xrightarrow{\varphi} R \to 0$$

$$\mathfrak{m} \subset R \ , \ \mathfrak{m}' \subset R' \ : \ \text{maximal ideals}$$

E が locally free なので、$\mathcal{E}$ や $\tilde{\mathcal{E}}$ も locally free.

$\mathfrak{m}$ の $R/\mathfrak{m}$-vec. sp としての基底を $v_1, \cdots, v_n$ とおく.

R の積演算を "$\cdot$", R' の積演算を "$*$" で表すと.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) * \left(\sum_{i=1}^{n} a_i' v_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i' v_i\right) + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} a_i a_j' w$$

と表せる. ($\{b_{ij}\}$ は対称行列) ($w \in I$, $w^2 = 0$)
$(w \cdot v_i = 0)$

また. (Prop 5.27) の

$$\eta_{\alpha\beta} : E|_{U_{\alpha\beta}} \otimes R \xrightarrow{\sim} E|_{U_{\alpha\beta}} \otimes R$$

は. $\mu_{\alpha\beta}^{i} \in H^0(U_{\alpha\beta}, \mathcal{E}nd(E))$ として.

$$\mu_{\alpha\beta} = id_E + \sum_{i=1}^{n} \mu_{\alpha\beta}^{i} v_i$$

と表せる.

$\mu_{\alpha\beta}$ は cocycle 条件 $\mu_{\alpha\beta} \circ \mu_{\beta\gamma} = \mu_{\alpha\gamma}$ をみたすので、

$$\left(id_E + \sum_{i=1}^{n} \mu^i_{\alpha\beta} v_i\right) \cdot \left(id_E + \sum_{i=1}^{n} \mu^i_{\beta\gamma} v_i\right) = id_E + \sum_{i=1}^{n} \mu^i_{\alpha\gamma} v^i . \qquad -(*)$$

が成り立つ.

$\eta_{\alpha\beta}$ の $U_{\alpha\beta}$ 上での拡張 $\eta'_{\alpha\beta}$ は.

$$\eta'_{\alpha\beta} = id_E + \sum_{i=1}^{n} \mu^i_{\alpha\beta} v_i + \vartheta_{\alpha\beta}\, w$$

$$(\vartheta_{\alpha\beta} \in H^0(U_{\alpha\beta}, End(E)))$$

と表せる.

$\tilde{\mathcal{E}}$ が存在する必要十分条件は,

$\{\eta'_{\alpha\beta}\}$ が cocycle 条件をみたすこと. つまり

$$\left(id_E + \sum \mu^i_{\alpha\beta} v_i + \vartheta_{\alpha\beta} w\right) * \left(id_E + \sum \mu'_{\beta\gamma} v_i + \vartheta_{\beta\gamma} w\right)$$

$$= id_E + \sum \mu^i_{\alpha\gamma} \mu_i + \vartheta_{\alpha\gamma}\, w . \qquad -(**)$$

が成り立つことである. $(*)$ と $(**)$ の w の係数を比べて,

$$\sum b_{ij} \mu^i_{\alpha\beta} \mu^i_{\beta\gamma} = -\vartheta_{\alpha\beta} - \vartheta_{\beta\gamma} + \vartheta_{\alpha\gamma}$$
$$= -\partial\{\vartheta_{\alpha\beta}\}$$

を得る. $O(\mathcal{E}) = \sum b_{ij} \mu^i_{\alpha\beta} \mu^i_{\beta\gamma}$ として (Prop 5.2) が従う. □

Rem

Cor 5.28 の逆

「$M_\omega(v)$ が滑らか $\Rightarrow$ $\mathrm{Ext}_X^2(E,E)=0$」

$\Leftrightarrow$

「$\mathrm{Ext}_X^2(E,E)\neq 0$ $\Rightarrow$ $M_\omega(v)$ は特異点を持つ」

は成立しない.

Ex 5.30

X : smooth Proj. variety (ω : ample line bdl)

$$v=(1,0,0,\dots,0)\in H^{2*}(X,\mathbb{Q})$$

とおくと. $M_\omega(v)$ の閉点は.

L : X 上の rank 1 locally free sheaf s.t. $c_1(L)=0$.

に対応する. また.

$$H^2(X,\mathcal{O}_X)\neq 0 \Rightarrow \mathrm{Ext}^2_X(L,L)\neq 0.$$

しかし. $M_\omega(v)$ は smooth になる.

(∵)

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^* \to 1. \qquad (\text{ex.})$$

に付随する exact sq.

$$0 \to H^1(X,\mathbb{Z}) \to H^1(X,\mathcal{O}_X) \to H^1(X,\mathcal{O}_X^*)$$

$$\xrightarrow{c_1} H^2(X,\mathbb{Z}) \to \cdots$$

を考え. $\mathrm{Pic}^0(X) := \ker(c_1)$ とおくと.

$$\mathrm{M}_{\mathrm{w}}(\mathrm{v}) = \mathrm{Pic}^0(X)$$

一方. $\mathrm{Pic}^0(X) = H^1(X,\mathcal{O}_X)/H^1(X,\mathbb{Z})$

は. 複素トーラスとなり smooth. □

Rem

$\mathrm{Pic}^0(X)$ が smooth なことから
$\mathrm{rank}(E) > 0$ なる $E \in \mathrm{Coh}(X)$ の
障害理論を精密化できる.

E : locally free sheaf

とすると. トレース写像

$$\mathcal{E}nd(E) \longrightarrow \mathcal{O}_X$$

より、

$$\mathrm{tr} : \mathrm{Ext}^i_X(E, E) \longrightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X)$$

$$(\cong H^i(X, \mathcal{E}nd(E)))$$

を得る.

$$\mathrm{Ext}^i_X(E,E)_0 := \ker\left(\mathrm{tr} : \mathrm{Ext}^i_X(E,E) \to H^i(X, \mathcal{O}_X)\right)$$

とおく.

(一般の $E \in \mathrm{Coh}(X)$ に対する trace map の構成は
Huybrechts FM in AG の P.77
(X: regular))

Prop 5.31

Prop 5.27 の状況で $rk(E) > 0$ とする。

このとき、

$$o(\mathcal{E}) \in \mathrm{Ext}^2_X(E,E)_0 \otimes_{\mathbb{C}} I$$

となる。

よって、任意の $[E] \in M_\omega(v)$ に対して、

$$\mathrm{Ext}^2_X(E,E)_0 = 0$$

$\Rightarrow$ $M_\omega(v)$ は smooth projective variety. ?

∵)

E : locally free sheaf とする。

$$\eta'_{ij} \circ \eta'_{jk} \circ \eta'_{ki} = id + O_{ijk}$$

の行列式をとると

$$tr(o(\mathcal{E})) = o(\det(\mathcal{E})) \in H^2(X, \mathcal{O}_X) \otimes I$$

(ex, 5.30) より、$\mathrm{Pic}^0(X)$ は smooth なので、

$$o(\det(\mathcal{E})) = 0$$

(※ variety X が a で smooth $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Hom}(\hat{\mathcal{O}}_{X,a}, R)$ が $\mathrm{Hom}(\hat{\mathcal{O}}_{X,a}, R')$ にのびる
$R, R' \in \mathrm{Art}$)

$\therefore \quad \mathrm{tr}(\, o(\mathcal{E})\,) = 0.$

$\therefore \quad o(\mathcal{E}) \in \ker\left(\mathrm{tr} : \mathrm{Ext}^2_X(E,E) \otimes I \to H^2(\mathcal{O}_X) \otimes I\right)$

$$= \mathrm{Ext}^2_X(E,E)_0 \otimes I.$$

$\mathrm{Ext}^2_X(E,E)_0 = 0$ ならば $o(\mathcal{E}) = 0.$

$\square$

[具体的計算]

まず，$\mathcal{E}$ の $\det(\mathcal{E})$ の変換函数 の $\det_R$ をとる：

$$d_{\alpha\beta} := \det_R\left(id_E + \sum \mu^i_{\alpha\beta} v_i\right)$$

$$= 1 + \sum d^i_{\alpha\beta} v_i \qquad \left(d^i_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}_X(U_{\alpha\beta})\right)$$

$\{d_{\alpha\beta}\}$ は $\det(\mathcal{E})$ の変換函数になっているので，
cocycle 条件をみたす：

$$\left(1 + \sum d^i_{\alpha\beta} v_i\right)\cdot\left(1 + \sum d^i_{\beta\gamma} v_i\right) = 1 + \sum d^i_{\alpha\gamma} v_i \qquad -(*)$$

一方，$\det(\hat{\mathcal{E}})$ は $\det(\mathcal{E})$ を R' 上に拡張したもの．
よって，その変換函数は，

$$\tilde{d}_{\alpha\beta} = 1 + \sum d^i_{\alpha\beta} v_i + g_{\alpha\beta} w$$

$\left(g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}_X(U_{\alpha\beta})\right)$ と表せる．

$\{\tilde{d}_{\alpha\beta}\}$ も R' 上で cocycle 条件をみたすので.

$$\tilde{d}_{\alpha\beta} * \tilde{d}_{\beta\gamma} = \tilde{d}_{\alpha\gamma}$$

i.e., $$\left(1 + \sum d_{\alpha\beta}^{i} v_i + \delta_{\alpha\beta} w\right) * \left(1 + \sum d_{\beta\gamma}^{i} v_i + \delta_{\beta\gamma} w\right)$$

$$= \left(1 + \sum d_{\alpha\gamma}^{i} v_i + \delta_{\alpha\gamma} w\right) \quad -(**)$$

(*), (**) の w の係数を比べて.

$$\sum b_{ij} d_{\alpha\beta}^{i} d_{\beta\gamma}^{j} = -\delta_{\alpha\beta} - \delta_{\beta\gamma} + \delta_{\alpha\gamma}$$

$$= -\partial(\{\delta_{\alpha\beta}\}).$$

一方. $\mu_{\alpha\beta}$ の行列式を. R' 上で直接とることを考える.
これは. $\{\tilde{d}_{\alpha\beta}\}$ と w の係数が違うだけ ← ちょっと分かってない.

$$\det_{R'}(\mu_{\alpha\beta}) = 1 + \sum d_{\alpha\beta}^{i} v_i + \delta_{\alpha\beta} w.$$

ここで、line bundle には障害がないので.
$\{\delta_{\alpha\beta}\}$ は 1-cocycle.

$$\det_{R'}(\mu_{\alpha\beta}) * \det_{R'}(\mu_{\beta\gamma}) = \det_{R'}(\mu_{\alpha\beta} * \mu_{\beta\gamma})$$

の両辺を R' 上で計算する.

(L.H.S)

$$= (1 + \Sigma d^i_{\alpha\beta} v_i + \delta_{\alpha\beta} w) * (1 + \Sigma d^i_{\beta\gamma} v_i + \delta_{\alpha\beta} w)$$

$$= (1 + \Sigma d^i_{\alpha\beta} v_i) \cdot (1 + \Sigma d^i_{\beta\gamma} v_i) + (\Sigma b_{ij} d^i_{\alpha\beta} d^i_{\beta\gamma} + \delta_{\alpha\beta} + \delta_{\beta\gamma}) w$$

$$= 1 + \Sigma d^i_{\alpha\gamma} v_i + (-\partial\{s_{\alpha\beta}\} + \delta_{\alpha\beta} + \delta_{\beta\gamma}) w.$$

(R.H.S)

$$= \det_{R'}((id_E + \Sigma \mu^i_{\alpha\beta} v_i) * (id_E + \Sigma \mu^i_{\beta\gamma} v_i))$$

$$= \det_{R'}((id_E + \Sigma \mu^i_{\alpha\beta} v_i) \cdot (id_E + \Sigma \mu^i_{\beta\gamma} v_i) + (\Sigma b_{ij} \mu^i_{\alpha\beta} \mu^j_{\beta\gamma}) w)$$

$$= \det_{R'}(id_E + \Sigma \mu^i_{\alpha\gamma} v_i + (\Sigma b_{ij} \mu^i_{\alpha\beta} \mu^j_{\beta\gamma}) w)$$

$$\overset{\clubsuit}{=} \det_{R'}(id_E + \Sigma \mu^i_{\alpha\gamma} v_i) + \mathrm{tr}(\Sigma b_{ij} \mu^i_{\alpha\beta} \mu^j_{\beta\gamma}) w$$

$$= 1 + \Sigma d^i_{\alpha\gamma} v_i + \delta_{\alpha\gamma} w + \mathrm{tr}(\Sigma b_{ij} \mu^i_{\alpha\beta} \mu^j_{\beta\gamma}) w$$

co-cycle.

$$\therefore \quad \mathrm{tr}(\Sigma b_{ij} \mu^i_{\alpha\beta} \mu^j_{\beta\gamma}) = \partial(\{\delta_{\alpha\beta}\} - \{\partial_{\alpha\beta}\})$$

$$(= -\partial(\{\partial_{\alpha\beta}\})) = 0 \quad \text{in } H^2(\mathcal{O}_X)$$

co-boundary

□

[$\dim X \geq 2$ でも $M_\omega(v)$ が smooth になる例]

Ex 5.32

S : $H^1(\mathcal{O}_S) = 0$ なる smooth proj. surface.

$v = (1, 0, -n) \in H^0(S,\mathbb{Z}) \oplus H^2(S,\mathbb{Z}) \oplus H^4(S,\mathbb{Z})$

$$\mathrm{Hilb}^n(S) := \left\{ \begin{array}{l} 0\text{ 次元部分スキーム } Z \subset S \\ \text{s.t. } \mathrm{length}\, \mathcal{O}_Z = n \end{array} \right\}$$

このとき.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hilb}^n(S) & \longrightarrow & M_\omega(v) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ Z & \longmapsto & I_Z \end{array}$$

が同型になる.

$\mathrm{Hilb}^n(S)$ は smooth なので
$M_\omega(v)$ も smooth.

(2)

任意の $[E] \in M_\omega(v)$ に対して。 rk E = 1

$$0 \to E \to E^{\vee\vee} \to Q \to 0$$

$$(\dim \operatorname{Supp}(Q) = 0)$$

を考える。

$E^{\vee\vee}$ は $\operatorname{rk}(E^{\vee\vee}) = 1$ の reflexive sheaf

つまり、line bdl.

(dim Supp(E) = 2 なら、reflexive ⇔ locally free)

$v = (1, 0, -n)$ より $c_1(E) = 0$.

$\therefore\ c_1(E^{\vee\vee}) = 0$.

$H^1(\mathcal{O}_S) = 0$ より $\mathrm{Pic}^0(S) = \{*\}$ で $E^{\vee\vee} \simeq \mathcal{O}_S$

$$\therefore\ 0 \to E \to \mathcal{O}_S \to Q \to 0 \quad \text{(ex)}$$

dim Supp(Q) = 0 より、

E は、0次元部分スキーム $Z \subset S$ の ideal 層 I_Z と同型。

$$\therefore\ \begin{array}{ccc} \mathrm{Hilb}^n(S) & \longrightarrow & M_\omega(v) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ Z & \longmapsto & I_Z \end{array}$$

は全射。(つくり方から単射)