§4.4 例外生成列を持つ代数多様体

X : projective alg. var.

strong exceptional collection

$D^b(X)$ が 強例外生成列 $(E_1, \cdots, E_m)$ を持つとき.

$A := \mathrm{End}(\bigoplus_i E_i)$ とおくと.

$$\Phi := R\mathrm{Hom}_X(\bigoplus_i E_i, -) : D^b(X) \to D^b(\mathrm{mod}\text{-}A)$$

は $\mathbb{C}$-linear な tri. cat の同値を与える. (Prop 4.53)

さらに、有限次元代数 A は 基本代数 (付録 B)

ある箙 $Q = (Q_0, Q_1)$ の道代数 (path algebra) $\mathbb{C}Q$ を

ある 許容イデアル で割ったもの と同型.

[$Q = (Q_0, Q_1)$ の与え方] $\quad i \xrightarrow{\alpha} j$

$Q_0 = \{1, 2, \cdots, m\}$ とおく. $\quad (e_i^2 = e_i)$

頂点 i に対応する A のべき等元 を e_i とすると.

頂点 i から j への道 は. ベクトル空間

$$e_i A e_j$$

の元 とみなせる.

$\left(\Phi(E_i) = \mathbb{R}\mathrm{Hom}_X(\Psi_j E_j, E_i) \right)$

一方，　　$\Phi(E_i) = e_i A$.　　で，

$$e_i A e_j = \mathrm{Hom}_A(e_i A, e_j A) = \mathrm{Hom}_X(E_i, E_j).$$

そこで，　$i<j$　に対し，写像の合成によって定まる
自然な写像

$$\phi_{ij} : \prod_{\substack{k \\ i<k<j}} \mathrm{Hom}(E_i, E_k) \times \mathrm{Hom}(E_k, E_j) \to \mathrm{Hom}(E_i, E_j)$$

を考え，　$\mathrm{Hom}(E_i, E_j) / \mathrm{Im}\,\phi_{ij}$　の基底を1つ決め，

それに，　$i \longrightarrow j \quad (\in Q_1)$　を1つ対応させる．

Hirzebruch surface.

[具体例) $(\mathbb{P}^n, \Sigma_e)$]

Thm 4.45 (Beilinson '78)

$D^b(\mathbb{P}^n)$ には. strong exceptional collection

$$(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1), \ldots, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n))$$

が存在する.

$$\left(\mathrm{Hom}^k_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(j), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(i)) = H^k(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(i-j)) = 0 \right)$$

$k \neq 0$, $|i-j| \leq n$

Lem 4.46

$f : X \to Y$: Noether スキーム間の射影射.

s.t. すべてのファイバーの次元が n 以下.

さらに,

Y : Affine

$\mathcal{L}$: X 上の ample line bundle で

大域切断で生成されているもの

とする.

このとき, $\bigoplus_{i=0}^{n} \mathcal{L}^{-i}$ は $D^-(X)$ を生成する.

∵

$\mathcal{L}$ によって、有限射

$$X \longrightarrow \mathbb{P}^n_Y \quad (:= \mathbb{P}^N \times Y)$$

が得られる。

N+1 変数の多項式環の Koszul 複体を考えて、

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N_Y}(-N-1) \to \cdots \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N_Y}(-k)^{\oplus \binom{N+1}{k}}$$

$$\to \cdots \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N_Y}(-1)^{\oplus (N+1)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N_Y} \to 0.$$

これを X 上に引き戻すと、

$$0 \to \mathcal{L}^{-N-1} \to \cdots \to (\mathcal{L}^{-k})^{\oplus \binom{N+1}{k}} \to \cdots \to \mathcal{O}_X \to 0.$$

また、K を

$$K := \operatorname{Ker}\left((\mathcal{L}^{-n-1})^{\oplus \binom{N+1}{n+1}} \longrightarrow (\mathcal{L}^{-n})^{\oplus \binom{N+1}{n}}\right)$$

とすると、(問 2.41) より、$\operatorname{Ext}^{n+1}_X(\mathcal{O}_X, K)$ の元として

$$0 \to K \to (\mathcal{L}^{-n-1})^{\oplus \binom{N+1}{n+1}} \to (\mathcal{L}^{-n})^{\oplus \binom{N+1}{n}} \to \cdots \to (\mathcal{L}^{-1})^{\oplus (N+1)} \to 0$$

を得る。

一方，ファイバー次元の仮定より $\mathrm{Ext}^{n+1}_X(\mathcal{O}_x, K)=0$.

(命 2.41 (iv)) より $\mathcal{O}_x$ は $D^b(X)$ の対象として複体

$$\cdots \to 0 \to (\mathcal{L}^{-n-1})^{\oplus\binom{N+1}{n+1}} \to \cdots \to (\mathcal{L}^{-1})^{\oplus(N+1)} \to 0 \to \cdots$$

の直和因子.

この複体の双対をとって，$j \geq 0$ に対し，induction で $\mathcal{L}^{-n-j-1}$ は $D^b(X)$ の対象として複体

$$\cdots \to 0 \to (\mathcal{L}^{-n-j})^{\oplus(N+1)} \to \cdots \to (\mathcal{L}^{-j})^{\oplus\binom{N+1}{n+1}} \to 0 \to \cdots$$

の直和因子.

つまり，$D^-(X)$ の充満部分三角圏 $\langle \mathcal{L}^{-i} \rangle_{0 \leq i \leq n}$ は，$\mathcal{L}^{-j}$ を含む.

$E \in D^-(X)$ に対し，

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}\left(\bigoplus_{i=0}^{n} \mathcal{L}^{-i}, E\right) = 0 \qquad \left(\text{i.e., } E \in {}^{\perp}\left\langle \bigoplus_{i=0}^{n} \mathcal{L}^{-i} \right\rangle\right)$$

が成り立つとき，任意の $j \geq 0$ に対しても

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}(\mathcal{L}^{-j}, E) = 0. \qquad (\clubsuit)$$

が言えた.

ここで E をシフトして,

$$E \in D(X)^{\leq 0}$$

とする.

$j \gg 0$, $-n \leq i \leq 0$ なる i に対し,

$$\mathbb{R}\Gamma(X, \mathcal{H}^i(E) \otimes \mathcal{L}^j) = \Gamma(X, \mathcal{H}^i(E) \otimes \mathcal{L}^j)$$

が成立. ($\because$ $\mathcal{L}$ が ample).

また, ファイバーの次元に関する仮定より

$$\mathbb{R}\Gamma(X, \tau_{\leq -n-1}(E \otimes \mathcal{L}^j)) \in D(\mathrm{Vect}(\mathbb{C}))^{<0}.$$

(☆☆)

ここで dist. tri.

$$\mathbb{R}\Gamma(X, \tau_{\leq -n-1}(E \otimes \mathcal{L}^j)) \to \mathbb{R}\Gamma(X, E \otimes \mathcal{L}^j) \to \mathbb{R}\Gamma(X, \tau_{> -n-1}(E \otimes \mathcal{L}^j))$$

((2.33) より)

を考えると,

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}\mathrm{Hom}(\mathcal{L}^{-j}, E)}}{0 =} \mathbb{R}^0\Gamma(X, E \otimes \mathcal{L}^j) \cong \mathbb{R}^0\Gamma(X, \tau_{> -n-1}(E \otimes \mathcal{L}^j)) \quad (\because ☆☆)$$

$$\cong \Gamma(X, \mathcal{H}^0(E) \otimes \mathcal{L}^j)$$

$\mathbb{R}\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, E \otimes \mathcal{L}^j) = 0$ (☆より)

$j \gg 0$ だったから $\mathcal{H}^0(E) = 0$.

$\therefore$ $E \in D(X)^{\leq -1}$.

これを繰り返して. $E \cong 0$.

$\square$

(

Rem

Ω が D を生成する.

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\langle \Omega \rangle^{\perp} = 0$. ($\Leftrightarrow$ ${}^{\perp}\langle \Omega \rangle = 0$)

$E \in {}^{\perp}\langle \bigoplus_{i=0}^{n} L^{-i} \rangle$ として. $E \cong 0$ を示した

)

例 4.47 [$\mathbb{P}^3$の場合]

有限次元代数を、

$$A := \mathrm{End}_{\mathbb{P}^3}\left(\bigoplus_{i=0}^{3} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(i)\right)$$

と定めると、(Prop 4.53) より

$$\Phi(-) := \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{P}^3}\left(\bigoplus_{i=0}^{3} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(i), -\right) : D^b(X) \to D^b(\mathrm{mod}\text{-}A)$$

は同値。

ここで $A = \mathrm{End}_{\mathbb{P}^3}\left(\bigoplus_{i=0}^{3} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(i)\right)$ は、次の箙

$Q = (Q_0, Q_1)$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, shift left=4.5, "x_0"] \arrow[r, shift left=1.5, "x_1"] \arrow[r, shift right=1.5, "x_2"] \arrow[r, shift right=4.5, "x_3"] & 1 \arrow[r, shift left=4.5, "x_0"] \arrow[r, shift left=1.5, "x_1"] \arrow[r, shift right=1.5, "x_2"] \arrow[r, shift right=4.5, "x_3"] & 2 \arrow[r, shift left=4.5, "x_0"] \arrow[r, shift left=1.5, "x_1"] \arrow[r, shift right=1.5, "x_2"] \arrow[r, shift right=4.5, "x_3"] & 3
\end{tikzcd}$$

の道代数の許容イデアルによる商 $\mathbb{C}Q/I$ と同型。

頂点 i の元に対応するべき等元を e_i とおくと、
mod-A の射影加群 $P(i)$ は、

$$P(i) = e_i A = \mathrm{Hom}\left(\bigoplus_{j=0}^{3} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(j),\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(i)\right)$$

頂点 i から頂点 $i+1$ への矢印、 $\overset{i}{\bullet} \longrightarrow \overset{i+1}{\bullet}$

つまり Q_1 の元は、(4.8) より

$$e_i A e_{i+1} \cong H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)) \cong \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]_1.$$

の基底 $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ の各元に対応する。

この場合、写像 (4.9) は、

$$\phi_{ij} : \prod_{k : i<k<j} \mathrm{Hom}(E_i, E_k) \times \mathrm{Hom}(E_k, E_j) \longrightarrow \mathrm{Hom}(E_i, E_j)$$

$j - i \geq 2$ のとき ϕ_{ij} は全射。

(cf. $\mathcal{O}$ から $\mathcal{O}(2)$ への矢印はない)。

$\mathrm{Hom}(E_i, E_j) / \mathrm{Im}\,\phi_{ij}$ の基底で Q_1 の元が決まる。

関係式は.

$$x_k x_j' - x_j x_k' \qquad (j, k = 0, 1, 2, 3)$$

これらが生成する ideal が I.
各頂点に対応する単純対象は.

$$\begin{cases} S(0) = \Phi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}) \\ S(1) = \Phi(\Omega_{\mathbb{P}^3}(1)[1]) \\ S(2) = \Phi(\Omega^2_{\mathbb{P}^3}(2)[2]) \\ S(3) = \Phi(\Omega^3_{\mathbb{P}^3}(3)[3]) \end{cases}$$

[Hirzebruch Surface の場合]

$$\Sigma_e := \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-e)) \qquad (e \geq 0)$$

を考える.
Σ_e の derived cat. $D^b(\Sigma_e)$ は.
次のような強例外生成列を持つ;

$$D^b(\Sigma_e) = \langle \mathcal{O}_{\Sigma_e}, \mathcal{O}_{\Sigma_e}(F), \mathcal{O}_{\Sigma_e}(C_0 + eF), \mathcal{O}_{\Sigma_e}(C_0 + (e+1)F) \rangle.$$

$$(C_0^2 = -e)$$

$\underline{I_0}$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O} \arrow[r, shift left, "x_0"] \arrow[r, shift right, "x_1"'] \arrow[d, shift right, "y_0"'] \arrow[d, shift left, "y_1"] & \mathcal{O}(F) \arrow[d, shift right, "y_0'"'] \arrow[d, shift left, "y_1'"] \\
\mathcal{O}(C_0) \arrow[r, shift left, "x_0'"] \arrow[r, shift right, "x_1'"'] & \mathcal{O}(C_0 + F)
\end{tikzcd}$$

など。