Ch.4. 導来圏の半直交分解と例外生成列

§4.1. 代数多様体の導来圏の不変量

X, Y ; smooth projective algebraic varieties $/\mathbb{C}$.

$D^b(X)$, $D^b(Y)$; derived categories.

$\left(D^b(X) = D^b(\mathrm{Coh}(X)) \right)$

$$\Phi : D^b(X) \xrightarrow{\sim} D^b(Y) \quad ; \quad \text{三角圏としての圏同値}$$

があるとき. X と Y は 導来同値, (YはXの) Fourier - Mukai パートナー であるという.

(Thm 2.53 (Orlov)) より. 図式

$$\begin{array}{ccc} & X \times Y & \\ \swarrow^{\pi_X} & & \searrow^{\pi_Y} \\ X & & Y \end{array}$$

に対して. $\exists P \in D^b(X \times Y)$ s.t. 同型を除いて一意.

$$\Phi \cong \Phi^P_{X \to Y}$$

$$\left(\Phi^P_{X \to Y}(-) := \mathbb{R}\pi_{Y*}\left(P \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathbb{L}\pi_X^*(-)\right) \right)$$

Lem 4.1

X と Y が導来同値 (i.e., $D^b(X) \simeq D^b(Y)$)

$\Rightarrow$ $\dim(X) = \dim(Y)$

(∵)

X と Y が導来同値なので. $D^b(X) \xrightarrow[\sim]{\Phi} D^b(Y)$

$^\exists P \in D^b(X \times Y)$ s.t. $\Phi \simeq \Phi_P$

$$\left(\Phi_P(-) := \mathbb{R}\pi_{Y*}(P \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathbb{L}\pi_X^*(-)) \right)$$

このとき. (3.1) より. Φ_P の左随伴, 右随伴函手は

$$\begin{cases} \Phi^{P_L}_{Y \to X}, & P_L := P^\vee \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \pi_Y^* \omega_Y[\dim Y] \quad (左) \\ \Phi^{P_R}_{Y \to X}, & P_R := P^\vee \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \pi_X^* \omega_X[\dim X] \quad (右) \end{cases}$$

と表せる. Φ は圏同値なので.

$$\Phi^{-1} \simeq \Phi^{P_L}_{Y \to X} \simeq \Phi^{P_R}_{Y \to X}$$

積分核の一意性から,

$$P^\vee \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \pi_Y^* \omega_Y[\dim(Y)] \simeq P^\vee \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \pi_X^* \omega_X[\dim(X)]$$

$$\therefore \quad P^\vee \otimes \pi_X^* \omega_X \simeq P^\vee \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \pi_Y^* \omega_Y [\dim(Y) - \dim(X)]$$

$P^\vee$ は bounded derived cat. の object なので.

$$\dim(X) = \dim(Y)$$

□

以下 他の不変量を探す

Def

$\mathcal{A}$: Abel圏 (より一般に完全圏) とする.

$\mathcal{A}$に対し、そのGrothendieck群 $K(\mathcal{A})$ を次のように定義:

・$\mathcal{A}$のすべての対象の同型類$[E]$で自由に生成されるAbel群 $\left(\bigoplus_{E\in\mathcal{A}}\mathbb{Z}[E]\right)$ を

その部分群

$$\left\langle [F]-[E]-[G] \;\middle|\; {}^{\exists} 0\to E\to F\to G\to 0 \text{ : exact} \right\rangle$$

で割ったものを $K(\mathcal{A})$ とする.

問4.2 (例)

$$\bigoplus_{V\in \mathrm{Vect}(\mathbb{C})} \mathbb{Z}[V] / \sim \qquad (V \simeq \mathbb{C}^{\dim V})$$

$$\begin{array}{ccccc} \varphi : & K(\mathrm{Vect}(\mathbb{C})) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & \pm[V] & \longmapsto & \pm\dim(V) \end{array}$$

φは全単射.

$0 \to V^0 \to V^1 \to V^2 \to 0$ ex. に対し、

$[V^1] = [V^0] + [V^2]$
$\dim V^1 = \dim V^0 + \dim V^2$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \varphi([V^0]+[V^2]) &= \varphi([V^1]) \\ &= \dim V^1 \\ &= \dim V^0 + \dim V^2 \\ &= \varphi([V^0]) + \varphi([V^2]). \end{aligned}$$

□

Def

D : 三角圏 とする。

D の Grothendieck 群 $K(D)$ を次のように定義：

・すべての D の対象の同型類 $[E]$ で自由に生成される Abel 群を、その部分群

$$\langle [F]-[E]-[G] \mid {}^{\exists} \underbrace{E \to F \to G \to E[1]}_{\text{exact. tri.}} \rangle$$

で割ったものが $K(D)$.

$$\bigoplus_{E \in D} \mathbb{Z}[E] \Big/ \sim$$

三角圏.

問 4.3 (例)

$\mathcal{A}$: Abel 圏, $D^b(\mathcal{A})$: $\mathcal{A}$の導来圏.

(i) $E^{\bullet} \in D^b(\mathcal{A})$ に対し, $K(D^b(\mathcal{A}))$ の中で,

$$[E^{\bullet}] = \sum_i (-1)^i [\mathcal{H}^i(E^{\bullet})] = \sum_i (-1)^i [E^i]$$

(ii) $K(\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} K(D^b(\mathcal{A}))$.

∵

(i) $K(\mathcal{A})$ の中で 次を示す :

$$\sum_i (-1)^i [E^i] = \sum_i (-1)^i [\mathcal{H}^i(E^{\bullet})].$$

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathrm{Im}(d^i) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cap"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & E^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}"] & E^i \arrow[r, "d^i"] \arrow[ur] & E^{i+1} \arrow[r, "d^{i+1}"] & \cdots \\
 & \ker(d^i) \arrow[ur, hook] & & & \\
0 \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}$$

$$0 \to \ker(d^i) \to E^i \to \mathrm{Im}(d^i) \to 0.$$
$$0 \to \mathrm{Im}(d^{i-1}) \to \ker(d^i) \to \mathcal{H}^i(E^{\bullet}) \to 0.$$

が exact なので.

$$[\mathcal{H}^i(E^\cdot)] = [\ker(d^i)] - [\mathrm{Im}(d^{i-1})]$$

$$[E^i] = [\ker(d^i)] + [\mathrm{Im}(d^i)]$$

$$\therefore \sum_i (-1)^i [E^i] = \sum_i (-1)^i \left([\ker(d^i)] + [\mathrm{Im}(d^i)] \right)$$

例えば…

$$= \cdots - [\mathrm{Im}(d^{-1})]$$
$$+ [\ker(d^0)] + [\mathrm{Im}(d^0)]$$
$$- [\ker(d^1)] - [\mathrm{Im}(d^1)]$$
$$+ \cdots$$

$$= \sum_i (-1)^i \left([\ker(d^i)] - [\mathrm{Im}(d^{i-1})] \right)$$

$$= \sum_i (-1)^i [\mathcal{H}^i(E^\cdot)]$$

(ii) $\mathcal{E}^\cdot \simeq \mathcal{F}^\cdot$ in $D^b(\mathcal{A})$ ならば

$$\left(\begin{array}{l} \forall i, \quad \mathcal{H}^i(\mathcal{E}^\cdot) = \mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\cdot) \\ \therefore (1) より, \\ \quad [\mathcal{E}^\cdot] = [\mathcal{F}^\cdot] \quad \text{in } K(D^b(\mathcal{A})). \end{array} \right)$$

$$\iota : K(D^b(\mathcal{A})) \longrightarrow K(\mathcal{A})$$
$$[\mathcal{E}^\cdot] \longmapsto \sum_i (-1)^i [\mathcal{E}^i]$$
$$= \sum_i (-1)^i [\mathcal{H}^i(\mathcal{E}^\cdot)]$$

とする.

$D^b(\mathcal{A})$ で dist. tri.

$$\mathcal{E}^\cdot \to \mathcal{F}^\cdot \to \mathcal{G}^\cdot \to \mathcal{E}^\cdot[1]$$

があれば,

$$\cdots \to \mathcal{H}^i(\mathcal{E}^\cdot) \to \mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\cdot) \to \mathcal{H}^i(\mathcal{G}^\cdot)$$
$$\to \mathcal{H}^{i+1}(\mathcal{E}^\cdot) \to \cdots$$

は $\mathcal{A}$ での long ex. sq.

$$\therefore \quad \iota([\mathcal{F}^\cdot]) = \sum_i (-1)^i [\mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\cdot)]$$
$$= \sum_i (-1)^i ([\mathcal{H}^i(\mathcal{E}^\cdot)]) + \sum_i (-1)^i ([\mathcal{H}^i(\mathcal{G}^\cdot)])$$
$$= \iota([\mathcal{E}^\cdot]) + \iota([\mathcal{G}^\cdot])$$

$$\therefore \quad \iota([\mathcal{E}^\cdot] + [\mathcal{G}^\cdot]) = \iota([\mathcal{E}^\cdot]) + \iota([\mathcal{G}^\cdot])$$

で ι は group hom.

$$\iota^{-1} : K(\mathcal{A}) \longrightarrow K(D^b(\mathcal{A})) \; ; \; [\mathcal{E}] \longmapsto [\mathcal{E}]$$

□

以下，$K(\mathcal{A})$ と $K(D^b(\mathcal{A}))$ を同一視する.

X : smooth projective algebraic variety
$D := D^b(X)$ $\quad (= D^b(\mathrm{Coh}(X)))$ とし.

X の局所自由層からなる完全圏の Grothendieck 群を $K(X)$ とおく.

<u>Lem</u>

X 上の任意の連接層 E は、局所自由層による有限の長さを持つ複体と擬同型となる.

∵ Huy. Prop 3.26, Hartshorne Ch.3 ex.6.9. など.

$n = \dim(X)$ として.

$$0 \to \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_{n-1} \to \cdots \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_0 \to E \to 0$$

$\mathcal{E}_i$: locally free sheaf.

問4.3 を用いれば,

$$K(X) \simeq K(D^b(X)).$$

$$\begin{pmatrix} \text{局所自由層} \\ \mathcal{E}^\cdot \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \text{連接層} \\ E^\cdot \end{pmatrix}$$

$E, F \in D^b(X)$ に対し、その $K(X)$ での積を、

$$[E]\cdot[F] := [E \overset{L}{\otimes} F]$$

と定めることができ、$K(X)$ は $[\mathcal{O}_X]$ を単位元とした環構造を持つ。（Grothendieck 環）

Rem

locally free にしないと、$\overset{L}{\otimes}$ が上手く定まらない。
（Huybrechts p.78 など）

Coniveau フィルトレーション

$$\mathrm{Coh}^{\geq i}(X) := \{ F \in \mathrm{Coh}(X) \mid \mathrm{codim}_X(\mathrm{Supp}(F)) \geq i \}$$

とおくと、各 i について、$\mathrm{Coh}(X)$ の部分 Abel 圏。
そこで、自然な写像

$$K(\mathrm{Coh}^{\geq i}(X)) \longrightarrow K(\mathrm{Coh}(X))$$

の像を

$$F^i(K(X)) := \mathrm{Im}(K(\mathrm{Coh}^{\geq i}(X)) \to K(\mathrm{Coh}(X)))$$

と定める。これは $K(X)$ の filtration を定める。

$$F^i(K(X)) \cdot F^j(K(X)) \subset F^{i+j}(K(X))$$

となる.

$$Gr^i(K(X)) := F^i(K(X)) / F^{i+1}(K(X))$$

とおくと.

$$\begin{cases} \mathrm{rank} : Gr^0(K(X)) \longrightarrow A^0(X) \cong \mathbb{Z}. \\ \det : Gr^1(K(X)) \longrightarrow A^1(X) = \mathrm{Pic}(X). \\ c_2 : Gr^2(K(X)) \longrightarrow A^2(X) \end{cases}$$

は同型 (Fulton Ex 15.3.6).

三角圏の同値 $\Phi : D_1 \longrightarrow D_2$ が与えられているとき.
Φ は dist. tri. を dist. tri. に移す.
∴ それらの Grothendieck 群 $K(D_1)$, $K(D_2)$ は同型.

特に、X と Y が Fourier 同伴パートナー ならば.
それらの Grothendieck 群 $K(X)$, $K(Y)$ は同型.

Thm 4.5 (Grothendieck - Riemann - Roch の定理)

smooth quasi-projective varieties の間の射影射

$$f : X \to Y$$

に対し、

次の図式が可換となる：

$$f_!(\mathcal{F}^\bullet) = \sum_i (-1)^i \left(\sum_j (-1)^j [R^j f_* \mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet)] \right)$$

$$\begin{tikzcd}
D^b(X) \arrow[rrr, "Rf_*"] \arrow[dr] \arrow[dd, "\mathrm{ch}(-)\mathrm{td}_X"'] & & & D^b(Y) \arrow[dl] \arrow[dd, "\mathrm{ch}(-)\mathrm{td}_Y"] \\
& K(X) \arrow[r, "f_!"] \arrow[dl] & K(Y) \arrow[dr] & \\
A(X)_{\mathbb{Q}} \arrow[rrr, "f_*"'] & & & A(Y)_{\mathbb{Q}}
\end{tikzcd}$$

$Y = \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ として次を得る。

Cor 4.6 (Hirzebruch - Riemann - Roch の定理)

X : smooth projective variety と

$E \in D^b(X)$ に対し、

$$\chi(E) = \int_X \mathrm{ch}(E)\,\mathrm{td}_X$$

が成立。

$E, F \in D^b(X)$ に対して. Euler 形式 (Euler form) を

$$\chi(E,F) := \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}^i(E,F)$$

$$\left(\begin{aligned} &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ext}^i(E,F) \\ &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} H^i(X, E^\vee \overset{L}{\otimes} F). \end{aligned} \right)$$

と定める. これは,

$$\chi(-,-) : K(X) \times K(X) \longrightarrow \mathbb{Z} \quad \left(\begin{matrix}\text{bilinear} \\ \text{form}\end{matrix}\right)$$

$$\chi(E,F) = \int_X \mathrm{ch}(E^\vee \overset{L}{\otimes} F)\, \mathrm{td}_X$$

と計算できる (Hirzebruch - Riemann - Roch)

$$\exists \Phi : D^b(X) \xrightarrow{\sim} D^b(Y)$$

なら. $\mathrm{Hom}(E,F) = \mathrm{Hom}(\Phi(E), \Phi(F))$ なので.

$K(X)$, $K(Y)$ の同型は Euler 形式を保つ.

$$\begin{array}{ccc} K(X) \times K(X) & \xrightarrow{\chi(-,-)} & \mathbb{Z} \\ \downarrow & \circlearrowleft & \| \\ K(Y) \times K(Y) & \xrightarrow[\chi(-,-)]{} & \mathbb{Z} \end{array}$$

問 4.7

X : smooth projective variety , $\dim X = n$.

X のコホモロジー環の元

$$v = (1, a_1, a_2, \cdots, a_n) \in H^{2*}(X, \mathbb{Q})$$

$(a_i \in H^{2i}(X, \mathbb{Q}))$

に対し、 $u = (1, b_1, b_2, \cdots, b_n) \in H^{2*}(X, \mathbb{Q})$

であって、

$$(u, u) = v$$

$((-,-)$ はカップ積$)$

をみたすものが一意的に存在。

この u を $\sqrt{v}$ とかく。

$\alpha \in K(X)$ に対し、Mukai ベクトル

$$v(\alpha) \in H^{2*}(X, \mathbb{Q})$$

を、

$$v(\alpha) := ch(\alpha)\sqrt{td_X}$$

で定義。

$E \in D^b(X)$ に対しては $v(E) := v([E])$ とする。

Prop 4.8

X, Y : smooth proj. var.

$P \in D^b(X \times Y)$ を核とする Fourier-向井変換

$$\Phi^P_{X\to Y} : D^b(X) \xrightarrow{\sim} D^b(Y)$$

が与えられているとする. このとき図式,

$$\begin{tikzcd}
D^b(X) \arrow[r, "\Phi^P_{X\to Y}", "\sim"'] \arrow[d, "{[-]}"'] & D^b(Y) \arrow[d, "{[-]}"] \\
K(D^b(X)) \cong K(X) \arrow[r, "\Phi^K_{[P]}"] \arrow[d, "v(-)"'] & K(Y) \cong K(D^b(Y)) \arrow[d, "v(-)"] \\
H^*(X, \mathbb{Q}) \arrow[r, "\phi^P_{X\to Y}"'] & H^*(Y, \mathbb{Q})
\end{tikzcd}$$

は可換となり, $\phi^P_{X\to Y}$ は $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間の間の同型を与える.

ここで $\phi^P_{X\to Y}$ は,

$$\begin{array}{ccc}
H^*(X, \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H^*(Y, \mathbb{Q}) \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
\beta & \longmapsto & \pi_{Y*}(v(P) \cdot \pi_X^*(\beta))
\end{array}$$

で与えられる.

$$\begin{array}{ccc} & X\times Y & \\ \pi_X \swarrow & & \searrow \pi_Y \\ X & & Y \end{array}$$

$\Phi^K_{[P]}$ について.

$[P] \in K(X\times Y)$ として.

$$\begin{array}{cccc} \Phi^K_{[P]} : & K(X) & \longrightarrow & K(Y) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & [\mathcal{F}] & \longmapsto & \pi_{Y!}([P]\otimes \pi_X^*([\mathcal{F}])) \end{array}$$

と定める. $\left(f_![\mathcal{F}] := \sum_i (-1)^i [R^i f_*(\mathcal{F})] \right)$.

[証明]

$$\begin{array}{ccc} K(X) & \longrightarrow & K(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*(X,\mathbb{Q}) & \longrightarrow & H^*(Y,\mathbb{Q}) \end{array}$$

の可換性を考える.

$$\begin{tikzcd}
K(X) \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\pi_X^*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^*(X,\mathbb{Q}) \arrow[d, "\pi_X^*"] \\
K(X\times Y) \arrow[r, "v\sqrt{td(Y)}^{-1}"'] \arrow[d, ".P"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^*(X\times Y,\mathbb{Q}) \arrow[d, ".v(P)"] \\
K(X\times Y) \arrow[r, "v\sqrt{td(X)}"'] \arrow[d, "\pi_{Y!}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft \ G.R.R."] & H^*(X\times Y,\mathbb{Q}) \arrow[d, "\pi_Y^*"] \\
K(Y) \arrow[r, "v"'] & H^*(Y,\mathbb{Q})
\end{tikzcd}$$

Proj. formula で可換

← G.R.R で可換.

の可換性.

ベクトル空間としての同型 $H^*(X, \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} H^*(Y, \mathbb{R})$ について.

(Huybrechts Prop 5.33 を参照)

あまり分かってない.

Rem

$\phi^P_{X\to Y}$ はコホモロジーの次数を保たない.

cf. Thm 2.54 で, $\Phi^P_{\hat{A}\to A}(\mathcal{O}_\alpha)$ は A 上の line bundle. だから, $\phi^P_{\hat{A}\to A}$ は コホモロジーの次数を保たない.

Cor 4.9

X と Y が導来同値なら

$$e(X) = e(Y)$$

(∵)

(Prop 4.8) で, $v(P) \in H^{2*}(X\times Y, \mathbb{Q})$ より,

$\phi^P_{X\to Y}$ は $H^*(X,\mathbb{Q})$, $H^*(Y,\mathbb{Q})$ の奇数次部分, 偶数次部分を保つ.

i.e.

$$\begin{cases} \phi(H^{even}(X)) \subset H^{even}(X) \\ \phi(H^{odd}(X)) \subset H^{odd}(X) \end{cases}$$

(∵

$$\alpha := v(P) = ch(P)\sqrt{td(X\times Y)}$$

$$\begin{array}{cccc} \phi^P_{X\to Y} : & H^*(X,\mathbb{Q}) & \longrightarrow & H^*(Y,\mathbb{Q}) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & \beta & \longmapsto & \pi_{Y*}(\underbrace{v(P)}_{H^{2*}(X\times Y,\mathbb{Q})\text{ の}} \cdot \pi_X^*(\beta)) \end{array}$$

)

$e(X) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim H^i(X,\mathbb{Q})$ だから ok. □

[FM変換の例 cf. Huybrechts example 5.4]

① $\mathrm{id} : D^b(X) \longrightarrow D^b(X)$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O}_\Delta \arrow[d, phantom, "\cdot"] & \\ & X \times X \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "p"] & \\ X & & X \end{tikzcd}$$

$$\Phi^{\mathcal{O}_\Delta}_{X\to X}(\mathcal{F}) = \mathbb{R}p_*\left(\mathcal{O}_\Delta \overset{\mathbb{L}}{\otimes} q^*(\mathcal{F})\right)$$

$$\left(\iota : X \xrightarrow{\sim} \Delta \subseteq X \times X \right)$$

$$= \mathbb{R}p_*\left(\iota_* \mathcal{O}_X \overset{\mathbb{L}}{\otimes} q^*(\mathcal{F})\right)$$

$$= \underbrace{\mathbb{R}p_*\big(\iota_*}_{\mathrm{id}}\left(\mathcal{O}_X \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \underbrace{\iota^* q^*}_{=\mathrm{id}}(\mathcal{F})\right)\big)$$

$$= \mathcal{F}.$$

② $f : X \longrightarrow Y$

$$\begin{tikzcd} & X \times Y \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "p"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

$$\mathbb{R}f_* \simeq \Phi^{\mathcal{O}_{\Gamma_f}}_{X\to Y} : D^b(X) \longrightarrow D^b(Y)$$

$$\Phi^{\mathcal{O}_{\Gamma_f}}_{X\to Y}(\mathcal{F}) = \mathbb{R}p_*\left(\mathcal{O}_{\Gamma_f} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} q^*\mathcal{F}\right)$$

$\Gamma_f \subset X \times Y$ で…

(

$\mathbb{L}f^* : D^-(Y) \longrightarrow D^-(X)$

Y : 滑らかでないとき…

)

$E : D^b(X)$ a spherical object.

$$\begin{array}{ccc} & X \times X & \\ \swarrow^{\pi_1} & & \searrow^{\pi_2} \\ X & & X \end{array}$$

$$ev : \pi_1^* E \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \pi_2^* E^\vee \longrightarrow \mathcal{O}_\Delta$$

$$P_E := \mathrm{Cone}(ev)$$

$$\Phi^{P_E}_{X \to X} : D^b(X) \to D^b(X)$$

$$\begin{cases} \mathbb{R}\mathrm{Hom}(E, E) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}[-\dim(X)] \\ E \otimes \omega_X \cong E \end{cases}$$

(Def 2.55)

X : smooth proj. var.

以下 X に対する Hochschild コホモロジー (ホモロジー) を定義する.

$HH(X)$: 2重次数付き環 を次のように定める:

$$\Delta : X \hookrightarrow X \times X \quad ; \text{diagonal embedding}$$

に対し, アーベル群

$$HA_{k,l}(X) := \mathrm{Ext}^{k}_{X\times X}(\mathcal{O}_\Delta, \omega_\Delta^{l})$$

と定め

$$HH(X) := \bigoplus_{k,l} HA_{k,l}(X)$$

とする.

$HH(X)$ に次のような積構造を与える:

$$\varphi \in HA_{k,l}(X), \quad \psi \in HA_{k',m}(X)$$

に対し, ψ を,

$$\mathrm{Ext}^{k'}_{X\times X}(\omega_\Delta^{l}, \omega_\Delta^{m+l}) \cong \mathrm{Ext}^{k'}_{X\times X}(\mathcal{O}_\Delta \otimes p_1^* \omega_X^{l}, \omega_\Delta^{m} \otimes p_1^* \omega_X^{l})$$

$$\mathrm{Ext}^{k'}(\mathcal{O}_\Delta, \omega_\Delta^{m}) \;\; \text{//} \;\; \wr$$

と思って, 導来圏の射として φ と合成させ,

$$\psi \cdot \varphi := \psi \circ \varphi \in \mathrm{Ext}^{k+k'}_{X\times X}(\mathcal{O}_\Delta, \omega_\Delta^{l+m}) = HA_{k+k', l+m}(X)$$

と定義.

これにより $HH(X)$ $\left(= \bigoplus_{k,l} HA_{k,l}(X)\right)$ は
2重次数付き環 となる.

Def 4.10

X : smooth projective variety

k 番目の Hochschild コホモロジー を次で定義.

$$HH^k(X) := HA_{k,0}(X) = \mathrm{Ext}^k_{X\times X}(\mathcal{O}_\Delta, \mathcal{O}_\Delta)$$

k 番目の Hochschild ホモロジー を次で定義.

$$HH_k(X) := HA_{k+\dim(X),\,1}(X) = \mathrm{Ext}^{k+\dim(X)}_{X\times X}(\mathcal{O}_\Delta, \omega_\Delta).$$

各次数の Hochschild コホモロジー の直和

$$HH^*(X) := \bigoplus_k HH^k(X) = \bigoplus_k HA_{k,0}(X)$$

$$\left(= \bigoplus_k \mathrm{Ext}^k_{X\times X}(\mathcal{O}_\Delta, \mathcal{O}_\Delta)\right)$$

は. $HH(X) = \bigoplus_{k,l} HA_{k,l}(X)$ の次数付き部分環となる.
これを Hochschild コホモロジー環 と呼ぶ.

また、各次数の Hochschild ホモロジーの直和

$$HH_*(X) := \bigoplus_k HH_k(X) = \bigoplus_k HA_{k+\dim(X),1}(X)$$

は、$HH^*(X)$ 上の次数付き左加群の構造が入る。

(両側?)

Thm 4.11

X, Y : smooth projective varieties

X, Y は互いに導来同値とする。 $(D^b(X) \simeq D^b(Y))$

このとき、2重次数付き環の同型

$$HH(X) \simeq HH(Y)$$

が得られる。

この同型を通じて、その部分環である Hochschild コホモロジー環の同型

$$HH^*(X) \simeq HH^*(Y)$$

が得られ、さらに、次数付き加群の同型

$$HH_*(X) \simeq HH_*(Y)$$

が存在する。

Huybrechts : FMT in AG Ch 6.

2重次数付き環

$$HH(X) = \bigoplus_{k,l} HA_{k,l}(X)$$

の $k=0$, $l \geq 0$ を考えると

$$R(X) := \bigoplus_{l \geq 0} HA_{0,l}(X) = \bigoplus_{l \geq 0} H^0(X, \omega_X^l)$$

が得られる。 (canonical ring)

小平次元 $\kappa(X)$ を

$$\begin{cases} R(X) = \mathbb{C} \Rightarrow \kappa(X) = -\infty \\ R(X) \neq 0 \Rightarrow \kappa(X) = \mathrm{tr.deg}_{\mathbb{C}}(R(X)) - 1 \end{cases}$$

で定める。

$$h^0(X, \omega_X^l) = 0 \quad \text{for } l > 0.$$

Cor 4.12

X, Y : smooth projective varieties, 導来同値。

このとき、

$R(X) \simeq R(Y)$, 特に、 $\kappa(X) = \kappa(Y)$

Lem 4.13

X : proj. var.

$\mathcal{L}$: X 上の ample line bundle.

$R := \bigoplus_{\ell \geq 0} H^0(X, \mathcal{L}^{\ell})$ とおくと. $X \simeq \mathrm{Proj}(R)$

K_X, K_Y が 共に (anti-) ample なら.
(Lem 4.13). (Cor 4.12) より

$$X \cong \mathrm{Proj}(R(X)) \cong \mathrm{Proj}(R(Y)) \cong Y$$

Thm 4.14

X : smooth quasi-proj. var.

このとき、ベクトル空間の同型

$$\begin{cases} HH^n(X) \cong \bigoplus_{p+q=n} H^q(X, \Lambda^p TX). \\ HH_n(X) \cong \bigoplus_{q-p=n} H^q(X, \Omega_X^p) \end{cases}$$

が存在.

$$H^n(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} H^q(X, \Omega_X^p)$$

Cor 4.16

X, Y ; 導来同値 な smooth proj. var. とすると

$$\begin{cases} \bigoplus_{p+q=n} H^q(X, \Lambda^p TX) \cong \bigoplus_{p+q=n} H^q(Y, \Lambda^p TY) \\ \bigoplus_{q-p=n} H^q(X, \Omega_X^p) \cong \bigoplus_{q-p=n} H^q(Y, \Omega_Y^p). \end{cases}$$