

§11.3 安定性条件の空間

$\mathcal{L}$: 三角圏

$\text{Slice}(\mathcal{L})$: $\mathcal{L}$ 上のスライス対象の集合.

と好む.

$P, Q \in \text{Slice}(\mathcal{L})$ に対して $d(P, Q) \in [0, \infty]$ と

$$d(P, Q) := \sup_{0 \neq E \in \mathcal{L}} \{ |\phi_P^-(E) - \phi_Q^-(E)|, |\phi_P^+(E) - \phi_Q^+(E)| \}$$

と定める.

$d(P, Q)$ は 距離の公理を満たし, $\text{Slice}(\mathcal{L})$ は 位相空間 となる.

(ただし $d(P, Q) = \infty$ もあり得る).

Γ : 有限生成 自由 Abel 群

$\Gamma_{\mathbb{R}} = \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ の norm $\|\cdot\|$

群同型 $d : K(\mathcal{L}) \longrightarrow \Gamma$

を固定する.

$$\mathbb{Z} : K(\mathcal{L}) \xrightarrow{c_1} \Gamma \xrightarrow{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$$

を 分析するのと 同値.

$$\begin{array}{ccc} K(\mathcal{L}) & \xrightarrow{\mathbb{Z}} & \mathbb{C} \\ & \searrow c_1 \quad \nearrow \mathbb{Z} & \\ & \Gamma & \end{array}$$

Def 11.11 (Kontsevich - Soibelman)

部分集合

$$\text{Stab}_P(\mathcal{D}) \subset \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{P}, \mathbb{C}) \times \text{Slice}(\mathcal{D})$$

2. 安定性条件の組 $(\mathcal{Z}, P)$ への次の台条件 (support property)

2. 2つもの. 2つ.

$$\sup \left\{ \frac{\|\text{cl}(E)\|}{|\mathcal{Z}(E)|} \mid 0 \neq E \in \bigcup_{\phi \in \mathbb{R}} P(\phi) \right\} < \infty$$

Rem 11.12.

$\Gamma_{\mathbb{R}}$ は有限次元ベクトル空間 となる.

台条件は $\Gamma_{\mathbb{R}}$ の 1次元の 2つ 方に 依存 する.

Rem (10) 11.15)

台条件 には, $P(\phi)$ は finite length abelian cat. になる.

ここで.

Abel 圏 $\mathcal{A}$ は finite length

$\Leftrightarrow$ Artin & Noether

$\Leftrightarrow$ object の 包含 の 上昇列 と 下降列 は 止まる.

$\Leftrightarrow \forall E \in \text{Ob}(\mathcal{A}), \text{Jordan-Hölder filtration}$ は 存在 :

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_n = E$$

s.t. E_i/E_{i-1} は simple.

Lemma 6.6.

安定性条件 (E, P) が台条件を満たすこと

Γ 上の二次形式 Q であって、次の条件を満たすものが存在することは同値。

(i) $\forall \phi \in \mathbb{R}, \forall E \in P(\phi), \quad Q(d(E)) \geq 0.$

(ii) $Q|_{\ker(Z)}$ は負定値。

($\Leftarrow$) (E, P) が台条件を満たすこと仮定すると。

$$\exists C > 0 \text{ s.t. } 0 \neq E \in P(\phi), \quad \|d(E)\| \leq C \cdot |\bar{Z}(E)|.$$

Γ 上の二次形式 Q を、

$$Q(v) = C \cdot |\bar{Z}(v)|^2 - \|v\|^2$$

と定める。

(i) $Q(d(E)) = C \cdot |\bar{Z}(d(E))|^2 - \|d(E)\|^2 \geq 0.$

(ii) $v \in \ker Z$ とき、

$$Q(v) = -\|v\|^2 = (v_1, v_2, v_r) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_r \end{pmatrix}$$

逆に条件 (i)(ii) を満たす Γ 上の Q が存在したとすると

Γ 上の非負二次形式 $-|\bar{Z}(v)|^2$ は、

$-Q(v) \leq 0$ となる領域で正定値。

$\Gamma_{\mathbb{R}}$ における単位球のコンパクト性から

$$C^2 |\bar{Z}(v)|^2 - Q(v)$$

は正定値。

$$N = c(E) \in \Gamma \quad \text{is not 0.} \quad C^2 |Z(c(E))|^2 - Q(c(E)) \geq 0.$$

$$\therefore C |Z(E)|^2 \geq \sqrt{Q(c(E))} = \|c(E)\|.$$

□

Thm 11.17

忘却写像

$$\begin{array}{ccc} \text{Stab}_P(\mathcal{L}) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (Z, P) & \longmapsto & Z \end{array} \quad (11.3)$$

は、局所同相写像.

特に、 $\text{Stab}_P(\mathcal{L})$ には、 $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{C})$ の標準的複素構造に
由り、(11.3) は正則写像に好ましく複素構造を一意的に定まり.

②

$$(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{\text{rk}(P)})$$

単射性 (Brid. Lem 6.4)

(11.3) は局所的に単射であることが示される.

$$\text{i.e.,} \quad \forall \sigma = (Z, P), \quad \forall \tau = (Z, Q) \in \text{Stab}_P(\mathcal{L}).$$

$$d(P, Q) < 1 \Rightarrow P = Q.$$

を自明

$P \neq Q$ かつ $d(P, Q) < 1$ は導かれない.

$$\exists \phi \in P, \quad \exists E \in P(\phi) \quad \text{s.t.} \quad E \notin Q(\phi)$$

$$(Z(E) \in \mathbb{R}_{>0} e^{i\phi} \text{ かつ } Z \neq 0)$$

(i) $E \in Q(\geq \phi) = \{Q(\theta) \mid \theta \in [\phi, \infty)\}_{ex}$ の場合.

$$d(P, Q) < 1 \text{ かつ } E \in Q([\phi, \phi+1))$$

よって, $E \notin Q(\phi)$ なので, これは

$$\zeta(E) \in \mathbb{R}_{>0} \cdot e^{i\alpha\phi} \text{ に等しい.}$$

よって, $E \notin Q(\geq \phi)$.

(ii) $E \in Q(\leq \phi) = \{Q(\theta) \mid \theta \in (-\infty, \phi]\}_{ex}$ の場合.

$$(i) \text{ と同様 } \zeta(E) \in \mathbb{R}_{>0} \cdot e^{i\alpha\phi} \text{ と等しい.}$$

よって, $E \notin Q(\leq \phi)$.

(iii) $E \in Q((\phi-1, \phi+1))$ の場合 かつ E が拡大で定義されている場合.

$$A \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow A[1] \quad \text{d.t.c. tr.}$$

$$\text{すなわち, } 0 \neq A \in Q([\phi, \phi+1)), \quad 0 \neq B \in Q([\phi-1, \phi])$$

と因子の性質をもちえる.

$$d(P, Q) < 1 \text{ かつ } A \in P((\phi-1, \phi+2)) \text{ かつ}$$

$$\text{さらに } A \in P([\phi-1, \phi]) \text{ かつ}$$

$$A \in P([\phi-1, \phi]) \text{ かつ } A \in Q([\phi, \phi+1)) \text{ かつ}$$

σ と τ が同じ ζ を持つことに等しい.

$$(P \text{ の } \frac{1}{\pi} \arg \zeta(A) \text{ と } Q \text{ の } \frac{1}{\pi} \arg \zeta(A) \text{ が一致する})$$

$$\text{よって, } \psi > \phi \text{ と } C \in P(\psi) \text{ が存在}$$

$$0 \neq f : C \rightarrow A \text{ が存在.}$$

条件③には, $\phi_P^+(A) = \psi$ として, 以下の合成を導くことができる.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & A_1 & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & A_m \rightarrow A \\
 & & \nwarrow \checkmark & & & & \nwarrow \checkmark \\
 & & F_1 & & & & F_m \\
 & & \uparrow & & & & \\
 & & P(\psi) & & & &
 \end{array}$$

f

このとき, 合成 $C \xrightarrow{f} A \rightarrow E$ は

$C \in P(\psi)$ かつ $E \in P(\phi)$, $(\psi > \phi) \wedge \rightarrow$ 射なので
スライズ条件から 0 射.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C & & \\
 \exists & \nearrow & \downarrow f & \searrow & 0 \\
 & G & & & \\
 B[G] & \rightarrow & A & \rightarrow & E
 \end{array}$$

$\text{Hom}(C, B[G]) \rightarrow \text{Hom}(C, A)$ は 全射 になるので,

$C \rightarrow A$ は $C \rightarrow B[G] \rightarrow A$ と 分解 する.

一方, $B[G] \in P(<\phi)$ なので, C かつ $B[G] \wedge 0$ ではない
存在しない はず である. これは矛盾.

以上により, $E \in Q(\phi)$, $\therefore P = Q$.

全射性 (Brid. '07 Section 7)

長くなるので、必要は補題は成り立つと認めて使う。

Claim 1.

$\sigma = (Z, P) \in \text{Stab}_p(\mathcal{A})$ とする。ここで、

$\exists C > 0$ s.t. $\forall W \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Gamma, \mathbb{C}), \forall E \in P(\Phi) \setminus \{0\}$,

$$\frac{|Z(E) - W(E)|}{|Z(E)|} \leq C \cdot \left| \frac{Z(E)}{\|d(E)\|} - \frac{W(E)}{\|d(E)\|} \right|$$

④ $(Z, P) \rightarrow$ 台条(4) 43.

$$\exists C > 0 \text{ s.t. } \|d(E)\| \leq C |Z(E)| \quad \left(\begin{array}{l} E \neq 0 \text{ 且} \\ \|d(E)\| > 0 \end{array} \right) \quad \left(1 \leq C \cdot \frac{|Z(E)|}{\|d(E)\|} \right)$$

$$\therefore |Z(E) - W(E)| \leq C \cdot \frac{|Z(E)|}{\|d(E)\|} \cdot |Z(E) - W(E)|$$

$$\therefore \frac{|Z(E) - W(E)|}{|Z(E)|} \leq C \cdot \frac{|Z(E) - W(E)|}{\|d(E)\|} = C \cdot \left| \frac{Z(E)}{\|d(E)\|} - \frac{W(E)}{\|d(E)\|} \right|.$$

$$\sigma = (z, p) \in \text{Stab}_p(\mathcal{L}) \quad z \rightarrow \text{固定点}.$$

$A \in \text{Hom}_2(P, \mathbb{C})$ に対し、次のように

operator norm $\|A\|_{op}$, r -Semi norm $\|A\|_r$ 定義:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \|A\|_{\text{op}} := \sup_{0 \neq v \in \mathbb{R}} \frac{|A(v)|}{\|v\|} = \sup_{\substack{v \in \mathbb{R} \\ \|v\|=1}} |A(v)| \in [0, \infty) \\ \cdot \|A\|_{\sigma} := \sup_{E: \text{semi}} \frac{|A(\zeta(E))|}{|\zeta(E)|} \in [0, \infty) \end{array} \right.$$

$$(C_{\text{adm}}^2) = F^4.$$

$$\|Z - W\|_{\sigma} \leq C \cdot \|Z - W\|_{op} < \infty$$

W は位相空間 $C(X)$ の $\|\cdot\|_\infty$ norm に付いて $C(X)$ の閉部分空間である。

Cladem 2

$$0 < \epsilon < \frac{1}{8}, \quad \exists U_\epsilon \subset \text{Hom}_Z(\Gamma, \mathbb{C}) : \text{open nbhd. of } z.$$

s.t. $\forall W \in U_z, \forall \phi \in \mathbb{R}, \forall E \in P(\phi).$

$$\frac{|Z(E) - W(E)|}{|Z(E)|} < \sin \pi \varepsilon. \quad (*)$$

(i)

$$0 < \varepsilon' < \sin(\pi\varepsilon) \quad \varepsilon \text{ 充分小}$$

$$U := \{ W \in \text{Hom}_2(P, \mathbb{C}) \mid \|Z - W\|_r < \varepsilon' \}$$

これは、 U は Z の (Euclid 位相 z_n) 附近 ε' 近傍である。

こゝで、任意の $W \in U$ について、

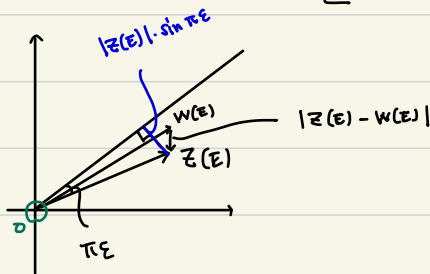
$$\sup_{E: \text{v.s.}} \frac{|Z(E) - W(E)|}{|Z(E)|} = \|Z - W\|_r < \varepsilon' < \sin(\pi\varepsilon)$$

□

Proof

(*) の意味:

⊂



図のより、(*) は、 $Z \in W$ が “十分近” にある

ことを言っている。

Def (Rind. Def 7.2)

$\mathcal{G}$ の thin subcategory とは.

$a, b \in \mathbb{R}$ と $0 < b - a < 1 - 2\varepsilon$ なる実数 a, b に対し.

$P((a, b)) \subset \mathcal{G}$ という形で表せる 充満部分圏 $\mathcal{G}$ の $\mathcal{G}$ を表す

$W \in \mathcal{U} \subset \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{C})$ である. ($\mathcal{U}$ は claim 2 の open nbd. of $\mathcal{G}$)

(Claim 2) によ. thin subcat. の対象 $E \in P((a, b))$ に対して.

$\arg W(E) \in (a - \varepsilon, b + \varepsilon)$ となることを示す. そこで.

Thin subcat. の対象 $E \in P((a, b))$ なる任意の dist. tri.

$$A \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow A[1] \quad (A, B \in P((a, b)))$$

に対して $\arg W(A) \leq \arg W(E)$ となることを示す.

E は W-半安定 と呼ばれることにする.

以下. $(0 \neq) E \in P((a, b))$ に対して.

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(E) := \frac{1}{\pi} \arg Z(E) \in (a, b) \\ \psi(E) := \frac{1}{\pi} \arg W(E) \in (a - \varepsilon, b + \varepsilon) \end{array} \right.$$

と表す. (この 1-1 対応は以下 $\phi(E)$ は z になるだけ...)

Def (Bril. Def 7.4)

$A = P([a, b])$ が $\mathcal{L}$ の thin subcategory である。

$a + \varepsilon \leq \psi(E) \leq b - \varepsilon$ となる ε (0 $\neq$) $E \in A$ は。

A において包まれる (enveloped by A) いう。

Lem (Bril. Lem 7.5).

$E \in \mathcal{L}$ が thin subcat. B, C において包まれること。

いえる。

B において E が W -半安定であること。

C において E が W -半安定であること。これは $\square$ 値。

$\frac{7}{10}$ $\psi \in \mathbb{R}$ に対して、 $a + \varepsilon < \psi < b - \varepsilon$ かつ

$0 < b - a < 1 - 2\varepsilon$ となる a, b が存在する。

部分圏 $Q(\psi) \subset \mathcal{L}$ である。

$Q(\psi) := \{ E \in P([a, b]) \mid E \text{ は } W\text{-半安定で } \psi(E) = \psi \} \cup \{0\}$.

と定める。

(Lem(7.5)) により $Q(\psi)$ は a, b の値に依存しない。

(以下、 $\mathcal{Q} = \{ Q(\psi) \}_{\psi \in \mathbb{R}}$ が $\mathcal{L}$ のスライスであることを読み解く)。

Lem (Brid. Lem 7.6)

$\chi_1 > \chi_2 \quad (E \in \mathcal{Q}), \quad E \in \mathcal{Q}(\chi_1), \quad F \in \mathcal{Q}(\chi_2) \quad \text{対して}$

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(E, F) = 0.$$

(Lem 11.2 と 同様の証明)

Lem (Brid. Lem 7.7)

$A := \mathcal{P}([a, b]) \subset \mathcal{D}$ は、有限の長さを持つ thick subcategory である。

このとき、 $(0 \neq) \exists E \in \mathcal{P}([a + 2\varepsilon, b - 4\varepsilon])$ は、

HN-filtration を持つ。

特に、 $0 = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_k = E$ として、

各 $F_i = E_i / E_{i-1}$ は A において $\mathcal{W}$ -安定で、

かつ A によって包まれている。

この Lem により、

$\mathcal{Q} = \{\mathcal{Q}(\chi)\}_{\chi \in \mathbb{R}}$ かつ $d(P, Q) < \varepsilon$ を満たす $\mathcal{D}$ のスライズ E を、

$\tau = (W, Q) \in \text{Stab}_{\mathcal{P}}(\mathcal{D})$ と対応させることができる。

以上により、 $\text{Stab}_{\mathcal{P}}(\mathcal{D}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{C})$ は局所的に全射。

$d(P, Q) < \varepsilon$ により、これは南写像であり、 τ は特に局所同相写像。

$$\begin{array}{ccc} \text{Stab}_{\mathcal{P}}(\mathcal{D}) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{C}) \\ \cup & & \cup \\ \mathcal{U}_P = V_P \times \mathcal{U}_{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & \mathcal{U}_{\mathbb{Z}} \end{array}$$

□

Def 11.18

X : smooth proj. alg. var.

$$\mathrm{ch} : K(X) \rightarrow H^*(X, \mathbb{Q}) \quad \text{cc}$$

$$(P, d) := (Z_m(\mathrm{ch}), \mathrm{ch}) \quad \text{ccz.} \quad \text{ccz.}$$

$$\mathrm{Stab}(X) := \mathrm{Stab}_P(\mathrm{dg}^b(X)).$$

つまり, $\mathrm{Stab}(X)$ は X 上の 安定性条件の空間 (space of stability conditions)

を意味.

$\sigma \in \mathrm{Stab}(X)$ を X 上の安定性条件と呼ぶ.

次に, $\mathrm{Stab}_P(\mathcal{D})$ の 2 種類の自然な群作用を導入する.

$GL_2^+(\mathbb{R})$ の作用

$$GL_2^+(\mathbb{R}) := \{ A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) > 0 \} \subset GL_2(\mathbb{R})$$

を想起.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{R})$ に対し. A の QR 分解を用いて
 $\mathbb{R}^2 \ni s \mapsto \theta_A \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ を定めた.

$$A = QR.$$

$$\begin{cases} Q = \frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}} \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \pi \theta_A & -\sin \pi \theta_A \\ \sin \pi \theta_A & \cos \pi \theta_A \end{pmatrix} \\ R = \frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}} \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \end{cases}$$

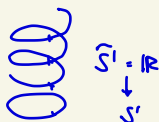
この表示により $GL_2^+(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^1$ となる. $\pi_1(GL_2^+(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}$.

$GL_2^+(\mathbb{R})$ の 普遍被覆 $\widetilde{GL_2^+(\mathbb{R})}$ を想起. (主として)

$$\begin{array}{ccc} \text{函数} & \theta : GL_2^+(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \\ & \downarrow \omega & \downarrow \omega \\ & A & \longmapsto \theta_A \end{array} \quad \text{を用いて}$$

$$\widetilde{GL_2^+(\mathbb{R})} = \{ (A, \phi) \in GL_2^+(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \mid \phi = \theta_A + 2\pi n \ (n \in \mathbb{Z}) \}$$

と表せば $(\mathbb{R} = \widetilde{S}^1 \rightarrow S^1 \rightarrow \text{点})$



問 11.19

$\widetilde{GL}_+^1(\mathbb{R})$ は, $(A, f) \in GL_+^1(\mathbb{R}) \times \text{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ として,

- $\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{a} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ は単調増加関数で} \\ \forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x) + 1 \\ \textcircled{b} \text{同値-視 } N' = \mathbb{R}/\mathbb{Z} = (\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\})/\mathbb{R}_{>0} \text{ において} \\ f \text{ と } A \text{ が } N' \text{ に誘導した写像は等しい.} \end{array} \right.$

をみたすものの集合である,

②

条件をみたす (A, f) の集合を E とする.

$$\begin{array}{ccc} \text{pr}_1 : E & \longrightarrow & GL_+^1(\mathbb{R}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (A, f) & \longmapsto & A \end{array} \quad \text{の fiber } \text{pr}_1^{-1}(A) \text{ は } E_A \text{ と表す.}$$

このとき, $E_A \simeq \mathbb{Z}$. 実際,

条件により f は $f(0)$ によって決まる.

$$\begin{array}{ccc} 0 & & f(0) \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ \downarrow & \cap & \downarrow \end{array}$$

$$\bigcirc \cap \xrightarrow[\bar{A}]{\bar{f}} \bigcirc \cap \xrightarrow{\pi \theta_A}$$

- $\left\{ \begin{array}{l} \cdot 1\text{目の条件により, } f \text{ は} \\ [0,1] \text{ での振る舞いによって} \\ \cdot 2\text{目の条件により, } f \text{ の} \\ [0,1] \text{ での振る舞いによって} \end{array} \right.$

図式から, $[f(0)] = [\theta_A] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

$$\therefore f(w) = \theta_A + 2^n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

5.2. $E_A \xrightarrow{\quad} \mathbb{Z}$ は全単射.

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ f & \longmapsto & \frac{f(w) - \theta_A}{2} \end{array}$$

これにより.

$$\begin{array}{ccc} (A, f) & \longmapsto & (A, f(w)) \\ \cap & & \cap \\ E & \longrightarrow & \widetilde{GL_2^+(\mathbb{R})} \\ & \searrow \quad \cap \quad \swarrow & \\ & GL_2^+(\mathbb{R}) & \\ & \downarrow & \\ & A & \end{array}$$

は $\mathbb{Z}$ -束の同型射 $\therefore \widetilde{GL_2^+(\mathbb{R})} = E$

$\sigma = (Z, P) \in \text{Stab}_P(\mathcal{A})$ と $(A, f) \in \widetilde{\text{GL}}_2^+(\mathbb{R})$ に対して.

新しい安定性条件 σ .

$$\sigma.(A, f) = (A^{-1} \circ Z, \{P(f(\phi))\}_{\phi \in \mathbb{R}})$$

で定める.

$$\left(\begin{array}{l} \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \text{ と 同-視して } A^{-1} \text{ を作用させる.} \\ A^{-1} \circ Z : K(\mathcal{A}) \xrightarrow{Z} \mathbb{C} \xrightarrow{A^{-1}} \mathbb{C} \end{array} \right)$$

よって 右作用

$$\begin{array}{ccc} \text{Stab}_P(\mathcal{A}) \times \widetilde{\text{GL}}_2^+(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \text{Stab}_P(\mathcal{A}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ ((Z, \{P(\phi)\}_{\phi \in \mathbb{R}}), (A, f)) & \longmapsto & (A^{-1} \circ Z, \{P(f(\phi))\}_{\phi \in \mathbb{R}}) \end{array}$$

を得る.

この作用は半安定対象 σ は不変.

また, $\mathbb{C}^*$ は $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ にかけ算で作用するので

$\text{GL}_2^+(\mathbb{R})$ の部分群とみなせる.

普遍被覆 $\mathbb{C} = \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ に対して. 明らかに

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \hookrightarrow & \widetilde{\text{GL}}_2^+(\mathbb{R}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \lambda & \longmapsto & (e^{\pi i \lambda}, f: x \mapsto x + \text{Re}(x)) \end{array}$$

わかる.

$\text{Aut}_{\text{eq}}(\mathcal{A})$ の作用

$$\text{Aut}_{\text{eq}}(\mathcal{A}) := \left\{ \Phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \mid \begin{array}{l} \Phi \text{ は } \mathbb{R}\text{-} \text{線形変換} \\ \text{同値変換} \end{array} \right\} / \sim$$

次の恒等式が成り立つ:

群同型

$$\alpha: \text{Aut}_{\text{eq}}(\mathcal{A}) \longrightarrow \text{Aut}(\Gamma)$$

が成り立つ。

$$\begin{array}{ccc} K(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\Phi} & K(\mathcal{A}) \\ \alpha \downarrow & \simeq & \downarrow \alpha \\ \Gamma & \xrightarrow{\alpha(\Phi)} & \Gamma \end{array}$$

が可換。

この恒等式より、

$$\begin{array}{ccc} \text{Aut}_{\text{eq}}(\mathcal{A}) \times \text{Sub}_P(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \text{Sub}_P(\mathcal{A}) \\ \downarrow \omega & & \\ (\Phi, \sigma) & \longmapsto & \Phi \cdot \sigma = (\sigma \circ \alpha(\Phi))^{-1}, \{ \Phi(P(\sigma)) \}_{\sigma \in \sigma} \end{array}$$

以上より、

$$\text{Aut}_{\text{eq}}(\mathcal{A}) \hookrightarrow \text{Sub}_P(\mathcal{A}) \hookrightarrow \widehat{GL_2^+(\mathbb{R})}$$

を得る。2つの作用は互いに可換。