§11.2. 三角圏の安定性条件.

§11.1の定義を、三角圏に拡張する

Def 11.4.

$\mathcal{D}$: 三角圏

$\mathcal{D}$ 上の安定性条件 (stability condition) とは、

$\mathcal{D}$ の有界な t-構造の heart $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ と、

$\mathcal{A}$ 上の安定性条件

$$Z : K(\mathcal{D}) = K(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

の組 $(Z, \mathcal{A})$ のこと、である.

Rem (命 7.7 (iii))

$$K(\mathcal{D}) \cong K(\mathcal{A}).$$

三角圏の安定性条件 $(Z, \mathcal{A})$ が与えられると、

各実数 $\phi \in \mathbb{R}$ に対して、$\mathcal{D}$ における位相が ϕ の半安定対象たち

を定めることができる. (Lem 11.6)

("$\mathcal{D}$ を実数 ϕ ごとに分解")

Def 11.5.

三角圏 D におけるスライス (slice) とは、部分圏の族

$$\mathcal{P} = \{\mathcal{P}(\phi)\}_{\phi\in\mathbb{R}}, \quad \mathcal{P}(\phi) \subset D$$

であって、次をみたすもの

- $\forall \phi \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{P}(\phi+1) = \mathcal{P}(\phi)[1]$
- $\phi_1 > \phi_2, \quad E_i \in \mathcal{P}(\phi_i) \Rightarrow \mathrm{Hom}(E_1, E_2) = 0.$
- ${}^\forall E \in D, \quad \exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \exists \phi_1 > \phi_2 > \cdots > \phi_n \ (\in \mathbb{R})$

$\exists$
$$\begin{tikzcd}
0 = E_0 \arrow[rr] & & E_1 \arrow[dl] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E_{n-1} \arrow[rr] & & E_n = E \arrow[dl] \\
& F_1 \arrow[ul, dashed, "{[1]}"] \arrow[u, phantom, "\triangledown"] & & & & F_n \arrow[ul, dashed, "{[1]}"] \arrow[u, phantom, "\triangledown"] &
\end{tikzcd}$$

s.t. $F_i \in \mathcal{P}(\phi_i)$.

$E \in D$ とスライス $\mathcal{P}$ に対し、

$$\phi_{\mathcal{P}}^+(E) := \phi_1, \quad \phi_{\mathcal{P}}^-(E) := \phi_n$$

と定める。

また、区間 $I \subset \mathbb{R}$ に対して、

$$\mathcal{P}(I) \quad (\subset D)$$

を、$\{\mathcal{P}(\phi) \mid \phi \in I\}$ たちの D における拡大閉包とする。

区間 $J = [\phi, \infty)$ に対し、$\mathcal{P}(J)$ を、$\mathcal{P}(\geq \phi)$ とも書く

Lem 11.6.

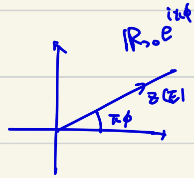
三角圏 $\mathcal{D}$ 上に 安定性条件 $(Z, \mathcal{A})$ を与えること、と

$\mathcal{D}$ 上の スライス $\mathcal{P}$ と 群準同型

$$Z : K(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

の組 $(Z, \mathcal{P})$ で、

$\forall \phi \in \mathbb{R}, \quad 0 \neq {}^{\forall} E \in \mathcal{P}(\phi). \quad Z(E) \in \mathbb{R}_{>0} e^{i\pi\phi}$



をみたすものを与えること とは 同値.

(∵) 最初に、$\mathcal{D}$ 上の 安定性条件 $(Z', \mathcal{A})$ から 出発して

スライス $\mathcal{P}$ を 構成する. $\left(Z : K(\mathcal{D}) \simeq K(\mathcal{A}) \xrightarrow[Z']{} \mathbb{C} \right)$

各 $0 < \phi \leq 1$ に対して、

$$\mathcal{P}(\phi) := \{ E \in \mathcal{A} \mid E \text{ は } Z\text{-半安定で } Z(E) \in \mathbb{R}_{>0} e^{i\pi\phi} \} \cup \{0\}$$

と定める.

任意の $\phi \in \mathbb{R}$ に対しては、$\phi \in (k, k+1]$ となる $k \in \mathbb{Z}$ をとって

$$\mathcal{P}(\phi) := \mathcal{P}(\phi - k)[k]$$

と定める.

→ あとで①

これらの $\mathcal{P}(\phi)$ は スライスを定め 構成から $0 \neq E \in \mathcal{P}(\phi)$ に対して

$$Z(E) \in \mathbb{R}_{>0} e^{i\pi\phi}.$$

逆に、条件をみたす 組 $(Z, \mathcal{P})$ が与えられたとする. このとき、$\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ を

$\mathcal{A} := \mathcal{P}((0,1])$ とすれば、組 $(Z, \mathcal{A})$ は 安定性条件をみたす □

↪ あとで②

Claim 1.

Lem 中の $\{P(\phi)\}_{\phi\in\mathbb{R}}$ は $\mathcal{D}$ のスライスを定める.

Step 1.

$\forall \phi \in \mathbb{R},\quad P(\phi+1) = P(\phi)[1]$

∵ $\forall \phi \in \mathbb{R}$, $\exists k \in \mathbb{Z}$ s.t. $\phi \in (k, k+1]$ だから

$\phi+1 \in (k+1, k+2]$ であり, $P(\phi)$ の定め方から,

$$\begin{aligned} P(\phi+1) &= P((\phi+1)-(k+1))[k+1] \\ &= P(\phi-k)[k+1] \\ &= (P(\phi-k)[k])[1] \\ &= P(\phi)[1] \end{aligned}$$

ok.

Step 2.

$\phi_1 > \phi_2$, $E_i \in P(\phi_i) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E_1, E_2) = 0$.

∵

Case 1. : $k < \phi_2 < \phi_1 \leq k+1$ のとき.

$\arg Z(E_1) = \pi(\phi_1 - k) > \pi(\phi_2 - k) = \arg Z(E_2)$ かつ

E_1, E_2 は Z-semistable なので, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E_1, E_2) = 0$.

Case 2. : $k_2 < \phi_2 \le k_2+1 \le k_1 < \phi_1 \le k_1+1$ のとき.

$E_1 \in \mathcal{A}[k_1]$, $E_2 \in \mathcal{A}[k_2]$ で,

$\mathcal{A}$ が bounded t-structure の heart であることから, 問7.7 (i) により

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E_1, E_2) = 0$.

ok.

Step 3.

$\forall E \in \mathcal{D}$, $\exists n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$, $\exists \phi_1 > \phi_2 > \cdots > \phi_n \ (\in \mathbb{R})$

$\exists$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 = E_0 \arrow[rr] & & E_1 \arrow[dl] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E_{n-1} \arrow[rr] & & E_n = E \arrow[dl] \\
& F_1 \arrow[ul, dashed] \arrow[u, phantom, "\triangledown"] & & & & F_n \arrow[ul, dashed] \arrow[u, phantom, "\triangledown"] &
\end{tikzcd}$$

s.t. $F_i \in \mathcal{P}(\phi_i)$

$\because$ $\mathcal{A}$ が bounded t-structure の heart なので 問7.7 (i) より

$\exists$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 = E_0 \arrow[rr] & & E_1 \arrow[dl] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E_{n-1} \arrow[d] \arrow[rr] & & E_n = E \arrow[dl] \\
& A_1[k_1] \arrow[ul, dashed] \arrow[u, phantom, "\triangledown"] & & & A_{n-1}[k_{n-1}] & A_n[k_n] \arrow[ul, dashed] \arrow[u, phantom, "\triangledown"] &
\end{tikzcd}$$

s.t. $k_1 > k_2 > \cdots > k_n \ (\in \mathbb{Z})$, $A_j[k_j] \in \mathcal{A}[k_j]$.

各 $A_j \in \mathcal{A}$ について, Z-安定性 $(Z, \mathcal{A})$ に関する HN-filtration が

存在するので, それを.

$0 = E_{j,0} \subset E_{j,1} \subset \cdots \subset E_{j,m_j} = A_j$ とおく.

各 $A_{j,i} = E_{j,i}/E_{j,i-1}$ は Z-semistable.

また, $\arg Z(A_{j,i}) = \pi \phi_{j,i}$ とおくと,

$$1 \geq \phi_{j,1} > \phi_{j,2} > \cdots > \phi_{j,m_j} > 0 \qquad \text{— ⊛}$$

$\mathcal{D}$ の八面体公理により

$$\begin{tikzcd} E_{n-1} \arrow[rr] & & E_n = E \arrow[dl] \\ & A_n[k_n] \arrow[ul, squiggly] \arrow[u, phantom, "\triangledown"] & \end{tikzcd} \quad と \quad \begin{tikzcd} E_{n,m_n-1}[k_n] \arrow[rr] & & E_{n,m_n}[k_n] = A_n[k_n] \arrow[dl] \\ & A_{n,m_n}[k_n] \arrow[ul, squiggly] \arrow[u, phantom, "\triangledown"] & \end{tikzcd}$$

から,

$$\begin{tikzcd} E_{n-1} \arrow[rr] & & {}^{\exists}F_{n,m_n-1} \arrow[rr] \arrow[dl] & & E_n = E \arrow[dl] \\ & E_{n,m_n-1}[k_n] \arrow[ul, squiggly] \arrow[u, phantom, "\triangledown"] & & A_{n,m_n}[k_n] \arrow[ul, squiggly] \arrow[u, phantom, "\triangledown"] & \end{tikzcd}$$

を得る. さらに,

$$\begin{tikzcd} E_{n-1} \arrow[rr] & & F_{n,m_n-1} \arrow[dl] \\ & E_{n,m_n-1}[k_n] \arrow[ul, squiggly] \arrow[u, phantom, "\triangledown"] & \end{tikzcd} \quad と \quad \begin{tikzcd} E_{n,m_n-2}[k_n] \arrow[rr] & & E_{n,m_n-1}[k_n] \arrow[dl] \\ & A_{n,m_n-1}[k_n] \arrow[ul, squiggly] \arrow[u, phantom, "\triangledown"] & \end{tikzcd}$$

から,

$$
\begin{tikzcd}
E_{n-1} \arrow[rr] & & {}^{\exists}F_{n,m_n-2} \arrow[rr] \arrow[dl] & & F_{n,m_n-1} \arrow[rr] \arrow[dl] & & E_n = E \arrow[dl] \\
& E_{n,m_n-2}[k_n] \arrow[ul, squiggly] & & A_{n,m_n-1}[k_n] \arrow[ul, squiggly] & & A_{n,m_n}[k_n] \arrow[ul, squiggly] &
\end{tikzcd}
$$

を得る。これを繰り返していくと、$E_{j,0} = 0$ なので

$$
\begin{tikzcd}
E_{n-1} \arrow[rr] & & F_{n,1} \arrow[r] \arrow[dl] & \cdots \arrow[r] & F_{n,m_n-1} \arrow[rr] & & E_n = E \arrow[dl] \\
& A_{n,1}[k_n] \arrow[ul, squiggly] & & & & A_{n,m_n}[k_n] \arrow[ul, squiggly] &
\end{tikzcd}
$$

にたどりつく。そこから、$E_1, \cdots, E_{n-1}$ に対しても同様の操作を続けることで、

$$
\begin{tikzcd}
0 = E'_0 \arrow[rr] & & E'_1 \arrow[r] \arrow[dl] & \cdots \arrow[r] & E'_{\ell-1} \arrow[rr] & & E'_\ell = E \arrow[dl] \\
& F'_1 \arrow[ul, squiggly] & & & & F'_\ell \arrow[ul, squiggly] &
\end{tikzcd}
$$

という形の列にたどりつく。

各 F'_k は $A_{j,i}[k_j]$ の形をしており、

$\phi(A_{j,i}[k_j]) = k_j + \phi_{j,i} \quad (\in (k_j, k_j+1])$ となると、

$k_1 > \cdots > k_n$ および ⊛ から $\phi(F'_1) > \cdots > \phi(F'_\ell)$ (GR)。

ϕ_k に $\phi(F'_k)$ の定め方から、$F'_k \in \mathcal{P}(\phi'_k)$ となる。

Q

Claim 2.

$\mathcal{A} := \mathcal{P}((0,1])$ とおくと. $(Z, \mathcal{A})$ は安定性条件.

まず, $\mathcal{A}$ が $\mathcal{D}$ の bounded t-structure の heart になることを示す

問7.7 (i) を用いる.

Step 1.

$\forall k_1 > k_2$, $\forall A, B \in \mathcal{A}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A[k_1], A[k_2]) = 0$

∵ $A[k_1] \in \mathcal{P}((0,1])[k_1] = \mathcal{P}((k_1, k_1+1])$.

$B[k_2] \in \mathcal{P}((0,1])[k_2] = \mathcal{P}((k_2, k_2+1])$ より.

$A[k_1] \in \mathcal{P}(\phi_A)$, $B[k_1] \in \mathcal{P}(\phi_B)$ とすると.

$$k_2 < \phi_B \leq k_2 + 1 \leq k_1 < \phi_A \leq k_1 + 1$$

$\{\mathcal{P}(\phi)\}$ がスライスなので, このとき $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A[k_1], B[k_2]) = 0$.

Step 2.

$0 \neq {}^\forall E \in \mathcal{D}$, $\exists\ k_1 > k_2 > \cdots > k_n \quad (\in \mathbb{Z})$

$$\exists\ \begin{tikzcd} 0 = E_0 \arrow[r] & E_1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & E_{n-1} \arrow[r] & E_n = E \arrow[d] \\ & A_1 \arrow[ul, dashed] & & & A_n \arrow[ul, dashed] \end{tikzcd}$$

s.t. $\forall j$, $A_j \in \mathcal{A}[k_j]$.

(∵) P がスライスなので、

$\forall E \in \mathcal{D}$, $\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\exists \phi_1 > \phi_2 > \cdots > \phi_n$ $(\in \mathbb{R})$

$$
\exists \quad
\begin{tikzcd}
0 = E_0 \arrow[r] & E_1 \arrow[r] \arrow[dl] & \cdots \arrow[r] & E_{n-1} \arrow[r] & E_n = E \arrow[dl] \\
F_1 \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "\triangledown"] & & & F_n \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "\triangledown"] &
\end{tikzcd}
$$

s.t. $\forall j$, $F_j \in P(\phi_j)$.

$\forall \phi_j$, $\exists k_j \in \mathbb{Z}$ s.t. $k_j < \phi \leq k_j + 1$ であり、

$P(\phi_j) = P(\phi_j - k_j)[k_j] \subset \mathcal{A}[k_j]$, $0 < \phi_j - k_j \leq 1$.

$\phi_1 > \phi_2 > \cdots > \phi_n$ より、このような k_j は

$k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_n$ をみたす。

もし、$k = k_i = k_{i+1}$ とすると、

$$
\begin{tikzcd}
E_{i-1} \arrow[r] & E_i \arrow[r] \arrow[d] & E_{i+1} \arrow[d] \\
& F_i \arrow[ul] \arrow[u, phantom, shift right=4ex, "\triangledown"] & F_{i+1} \arrow[ul] \arrow[u, phantom, shift right=4ex, "\triangledown"] \\
& \rotatebox{90}{$\in$} & \rotatebox{90}{$\in$} \\
& \mathcal{A}[k] & \mathcal{A}[k]
\end{tikzcd}
$$

$E_{i-1} \xrightarrow{\iota} E_{i+1} \longrightarrow \mathrm{Cone}(\iota) \xrightarrow{+1}$ で

$\mathrm{Cone}(\iota) =: F$ とおくと、

$$
\begin{cases}
E_{i-1} \longrightarrow E_i \longrightarrow F_i \xrightarrow{+1} \\
E_i \longrightarrow E_{i+1} \longrightarrow F_{i+1} \xrightarrow{+1} \\
E_{i-1} \longrightarrow E_{i+1} \longrightarrow F \xrightarrow{+1}
\end{cases}
\quad \text{in } \mathcal{D}
$$

に八面体公理を用いて、

$$F_i \longrightarrow F \longrightarrow F_{i+1} \xrightarrow{+1}$$

というdist. tri. を得る。

$F_i,\ F_{i+1} \in \mathcal{A}[k]$ で、$\mathcal{A} = P((0,1])$ は拡大閉包として定義されていたので $F \in \mathcal{A}[k]$.

よって

$$
\begin{tikzcd}
E_{i-1} \arrow[rr] & & E_{i+1} \arrow[dl] \\
& F \arrow[ul, "{[1]}"] \arrow[u, phantom, "\triangledown"] &
\end{tikzcd}
$$

s.t. $F \in \mathcal{A}[k]$ を得る。

このような操作を繰り返すことで、

$\forall i,j,\quad i \neq j \Rightarrow k_i \neq k_j$ となるようにできる。

$(k_1 > k_2 > \cdots > k_n)$

以上により、$\mathcal{A}$ は $\mathcal{D}$ の bounded t-structure の heart.

次に、$(Z, \mathcal{A})$ が安定性条件であることを示す。

ここで、

$$Z : K(\mathcal{D}) \simeq K(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

s.t. $\forall \phi \in \mathbb{R},\quad 0 \neq \forall E \in P(\phi),\quad Z(E) \in \mathbb{R}_{>0}\, e^{i\pi\phi}$.

Step 1.

$\llcorner$ $0 \neq \exists E \in \mathcal{A}, \quad Z(E) \in \mathbb{H}.$

(証) $0 \neq E \in \mathcal{A} = \mathcal{P}((0,1])$ について.

(i) $\exists \phi \in (0,1]$ s.t. $E \in \mathcal{P}(\phi)$ のとき.

$$Z(E) \in \mathbb{H} := \{ re^{i\pi\phi} \mid r > 0,\ 0 < \phi \leq 1 \} \qquad \text{ok.}$$

(ii) $\exists \phi_1, \phi_2 \in (0,1]$, $\exists F \in \mathcal{P}(\phi_1)$, $\exists G \in \mathcal{P}(\phi_2)$

s.t. $F \to E \to G \xrightarrow{+1} F[1]$ と表せるとき.

Z が群準同型なので $Z(E) = Z(F) + Z(G)$.

s.t. $\arg Z(F) = \pi\phi_1$, $\arg Z(G) = \pi\phi_2$

$Z(F), Z(G) \in \mathbb{H}$ より $Z(E) \in \mathbb{H}$ であることがわかる.

Step 2.

$\forall E \in \mathcal{A}$, $\exists$ HN-filtration

i.e., $0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_{n-1} \subset E_n = E$

s.t. $F_i = E_i / E_{i-1}$ は Z-semistable. で

$\arg Z(F_i) > \arg Z(F_{i+1})$.

$\because$ $\{P(\phi)\}$ がスライスなので. $0 \neq {}^\forall E \in \mathcal{A} := P((0,1])$, $\exists n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

$\exists\ \phi_1 > \cdots > \phi_n \quad (\in \mathbb{R})$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\exists\, 0 = E_0 \arrow[rr] & & E_1 \arrow[dl] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E_{n-1} \arrow[rr] & & E_n = E \arrow[dl] \\
& F_1 \arrow[ul] \arrow[u, phantom, "\triangledown"] & & & & F_n \arrow[ul] \arrow[u, phantom, "\triangledown"] &
\end{tikzcd}$$

s.t. $\forall i$, $F_i \in P(\phi_i)$.

このとき. 次の Lem ([Bri.07, Lem 3.4]) より

$1 > \phi_1 > \cdots > \phi_n \geq 0$

よって, 特に $1 \leq {}^\forall j \leq n$, $E_j, F_j \in \mathcal{A}$. が言える.

$\arg Z(F_i) = \pi \phi_i$ なので. $\arg Z(F_i) > \arg Z(F_{i+1})$ であり.

$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_{n-1} \subset E_n$ と見れば. 条件をみたす.

$\square$

(dist. tri. in $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$

$E_{j-1} \to E_j \to F_j \xrightarrow{+1}$ は $\mathcal{A}$ の short exact sq. $0 \to E_{j-1} \to E_j \to F_j \to 0$

を誘導する.)

Lem ([Bri, 07 Lem 3.4])

$\mathcal{P}$: $\mathcal{D}$ のスライス

$I \subset \mathbb{R}$: $\exists t \in \mathbb{R}$ s.t. $I = [t, t+1) \subset \mathbb{R}$ なる区間 とする.

また、

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] & \arrow[d, phantom, "\triangledown"] & E \arrow[dl] \\ & B \arrow[ul, dashed] & \end{tikzcd}$$

なる $\mathcal{D}$ の完全三角で

$(0 \neq)\ A, B, E \in \mathcal{P}(I)$ と考える.

このとき $\phi_{\mathcal{P}}^{-}(E) \leq \phi_{\mathcal{P}}^{-}(B)$, $\phi_{\mathcal{P}}^{+}(A) \leq \phi_{\mathcal{P}}^{+}(E)$. が成立.

∵ $\phi_{\mathcal{P}}^{+}(A) \leq \phi_{\mathcal{P}}^{+}(E)$ を示す ($\phi_{\mathcal{P}}^{-}(E) \leq \phi_{\mathcal{P}}^{-}(B)$ も同様)

$\phi = \phi_{\mathcal{P}}^{+}(A)$ とおくと、

$\exists A^{+} \in \mathcal{P}(\phi)$ s.t. $0 \neq \exists f : A^{+} \longrightarrow A$

(∵ 次のような合成射を考える.

$$\begin{tikzcd} 0 = A_0 \arrow[r] & A_1 \arrow[d] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & A_n = A \arrow[d] \\ & F_1 \arrow[ul] \arrow[urr, bend left, "f"] & & F_1 \end{tikzcd}$$

$F_1 \in \mathcal{P}(\phi)$)

$\phi > \phi_{\mathcal{P}}^{+}(E)$ として矛盾を導く.

スライスの条件により このとき $\mathrm{Hom}(A^{+}, E) = 0$.

$$\begin{tikzcd} & A^+ \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "0"] & \\ B[-1] \arrow[r] & A \arrow[r] & E \end{tikzcd}$$

よって、 $\mathrm{Hom}(A^+, B[-1]) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A^+, A)$ が全射となり、

$f : A^+ \to A$ は非自明な射 $A^+ \longrightarrow B[-1]$ を誘導する。

一方、 $B[-1] \in P(\leq t)$ なので、スライスの条件から $\phi \leq t$.

しかし $E \in P(I)$ より $\phi^+_P(E) \geq t$ だったのでこれは矛盾。

$$\therefore \quad \phi^+_P(A) = \phi \leq \phi^+_P(E)$$

$\square$

問 11.8 (Bridgeland. Lem 5.2)

σ = (Z, P)，$\phi \in \mathbb{R}$ に対し，$P(\phi) \subset \mathcal{D}$ は Abel 圏

∵ Lem 11.6 より $P(\phi) \subset P((k_\phi, k_\phi+1]) = \mathcal{A}[k_\phi]$

$(k_\phi < \phi \leq k_\phi + 1)$.

よって，$E, F \in P(\phi)$ として $f: E \to F$ をとる際，

Abel 圏 $\mathcal{A}[k_\phi]$ の中で $\ker(f)$，$\mathrm{Im}(f)$ $(\mathrm{Coker}(f))$ を考え，

それらが $P(\phi)$ の中に入っていることを示す

(特に $\ker(f)$，$\mathrm{Im}(f)$，$\mathrm{Coker}(f)$ は Z-半安定となる)

$\arg Z(\ker(f)) = \psi$，$\arg Z(\mathrm{Im}(f)) = \psi'$ とおく.

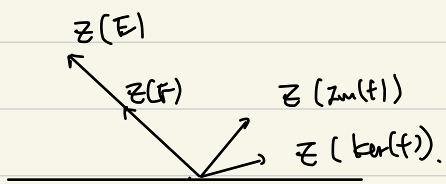
$\ker(f) \subset E$，$\mathrm{Im}(f) \subset F$ で，Z-semistability より

$$\psi \leq \phi, \quad \psi' \leq \phi$$

一方，$0 \to \ker(f) \to E \to \mathrm{Im}(f) \to 0$ より

$$Z(E) = Z(\ker(f)) + Z(\mathrm{Im}(f)).$$

だから $\psi = \psi' = \phi$ でないといけない



∴ $\ker(f), \mathrm{Im}(f) \in P(\phi)$ □

用語

Lem 11.6 の $\sigma = (Z, \mathcal{P})$ を $\mathcal{D}$ の安定性条件とよぶ。

群準同型 Z を中心電荷 (central charge) という

$\mathcal{P}(\phi)$ の対象を、位相 ϕ の半安定対象 (semistable object with phase ϕ)

と呼ぶ。

Abel 圏 $\mathcal{P}(\phi)$ の単純対象 E

(i.e., $E \in \mathcal{P}(\phi)$ に、非自明な部分対象 $0 \subsetneq F \subsetneq E$ が存在しない)

を、位相 ϕ の安定対象 (stable object with phase ϕ)

と呼ぶ。