P.62 $K(\mathrm{Coh}(C)) = \bigoplus_{E \in \mathcal{A}} \mathbb{Z}[E] \Big/ \langle [F]-[E]-[G] \mid \exists\, 0 \to E \to F \to G \to 0 \text{ ex.} \rangle$

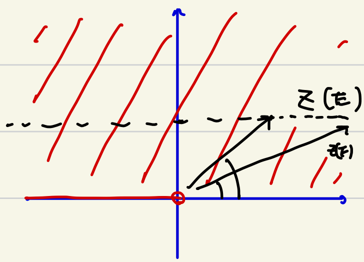
第11章 Bridgeland 安定性条件

§11.1 Abel 圏の安定性条件

$K(\mathrm{Coh}(C))$, C : smooth proj. alg. curve.

$$\begin{array}{cccc} Z : & K(C) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & [E] & \longmapsto & -\deg(E) + i\,\mathrm{rk}(E) \end{array}$$

$\forall \underset{\neq 0}{E} \in \mathrm{Coh}(E)$, $\quad Z(E) \in \mathbb{H} := \{ re^{i\pi\phi} \mid r>0,\ 0<\phi\leq 1 \}$



$$Z(E) = -\deg(E) + i\cdot \mathrm{rk}(E) = \mathrm{rk}(E)\cdot\left\{\frac{-\deg(E)}{\mathrm{rk}(E)} + i\right\}$$

$E \in \mathrm{Coh}(E)$ が (半)安定

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad 0 \neq {}^{\forall}F \subsetneq E, \quad \dfrac{\deg(F)}{\mathrm{rk}(F)} \underset{(-)}{<} \dfrac{\deg(E)}{\mathrm{rk}(E)} \quad \left(\dfrac{-\deg E}{\mathrm{rk} E} \underset{(-)}{<} \dfrac{-\deg F}{\mathrm{rk} F} \right)$

$\Longleftrightarrow \quad \arg Z(F) \underset{(-)}{<} \arg Z(E).$

$\left(\arg Z(-) \in (0, \pi] \right)$

以上を一般化する.

Def 11.1

Abel 圏 $\mathcal{A}$ 上の安定性条件 (stability condition) とは、
群準同型

$$Z : K(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

であって、次の 2 条件をみたすもの：

(i) $0 \neq {}^{\forall}E \in \mathcal{A}$, $Z(E) \in \mathbb{H}$.

(ii) ${}^{\forall}E \in \mathcal{A}$, $\exists$ HN-filtration

i.e., ${}^{\forall}E \in \mathcal{A}$,

$\exists\ 0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_k = E$

s.t. 各 $F_i = E_i / E_{i-1}$ が Z について半安定. で,

$\arg Z(F_i) > \arg Z(F_{i+1})$.

ここで, $0 \neq E \in \mathcal{A}$ が Z-(半)安定 (Z-(semi)stable) とは,

$0 \neq {}^{\forall}F \subsetneq E$, $\arg Z(F) \underset{(-)}{<} \arg Z(E)$

が成り立つものとして定義する. (0 は別に考える)

Rem.

HN-filtration は 存在するならば同型を除いて一意.

Lemma 11.2

$\mathcal{A}$: Abel圏.
群準同型 $Z : K(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$ が
$0 \neq {}^\forall E \in \mathcal{A}$, $Z(E) \in \mathbb{H}$ をみたすとする.
このとき, 次の条件が成立すると. Z-安定性に関する HN filtration が存在し, 従って Z は安定性条件を定める.

(i) $\mathcal{A}$ における全射の無限列

$$E_1 \twoheadrightarrow E_2 \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow E_i \twoheadrightarrow E_{i+1} \twoheadrightarrow \cdots$$

で $\arg Z(E_i) > \arg Z(E_{i+1})$ となるものは存在しない.

(ii) $\mathcal{A}$ における無限降下列

$$E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_i \supset E_{i+1} \supset \cdots$$

で $\arg Z(E_{i+1}) > \arg Z(E_i)$ となるものは存在しない.

Lem

(i) $E \in \mathcal{A}$ が Z-(半)安定 $\Leftrightarrow {}^\forall E \twoheadrightarrow F$, $\arg Z(E) \underset{(=)}{<} \arg Z(F)$

(ii) $E, F \in \mathcal{A}$: Z-半安定 とする. このとき.

$$\arg Z(E) > \arg Z(F)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(E, F) = 0.$$

f が単射なら $E \subset F$ となるが、これは F の半安定性に反する。

以下、f は単射でないとする。

∵ (i) E が Z-(半)安定として、

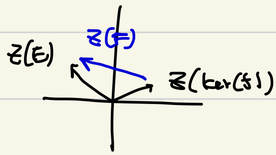
$$0 \to \ker(f) \to E \xrightarrow{f} F \to 0 \quad \text{ex.}$$

を考える。

$\ker(f) \subset E$ より、 $\arg Z(\ker(f)) \underset{(<)}{\leq} \arg Z(E)$.

また、$[E] = [\ker(f)] + [F]$ in $K(\mathcal{A})$ より、

$$Z(E) = Z(\ker(f)) + Z(F)$$



∴ 右の図より、 $\arg Z(F) \underset{(-)}{\geq} \arg Z(E)$

[逆は略]

(ii) $0 \neq f : E \to F$ があったとすると、 E は Z-半安定なので、

$$0 \to \ker(f) \to E \xrightarrow{f} \mathrm{Im}(f) \to 0 \quad \text{ex.}$$

に対し、

(i) より、 $\arg Z(E) \leq \arg Z(\mathrm{Im}(f))$.

一方、 F も Z-半安定なので、

$\mathrm{Im}(f) \subseteq F$ より $\arg Z(\mathrm{Im}(f)) \leq \arg Z(F)$.

よって、 $\arg Z(E) \leq \arg Z(F)$ となり 仮定に矛盾。 □

[lem 11.2 の証明]

Step 1.

$\mathcal{A}$ の任意の対象 E は、$\arg Z(A) \geq \arg Z(E)$ をみたす
Z-半安定対象 A を含む。
同様に、$\arg Z(E) \geq \arg Z(B)$ をみたす Z-半安定対象 B と、
全射 $E \twoheadrightarrow B$ が存在。

(∵) E が Z-半安定なら $A = E$ ととる。そうでないなら、
E は

$$\arg Z(E') > \arg Z(E)$$

となる $\mathcal{A}$ の対象 E' を含む。これを繰り返して、

$$E \supset E' \supset \cdots \supset E^i \supset E^{i+1} \supset \cdots$$

で、かつ、

$$\arg Z(E^{i+1}) > \arg Z(E^i)$$

となる列を得る。
一方、仮定 (i) より、この列は停留的。
i.e., $\exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $E \supset E^n$ かつ E^n は Z-半安定となる。
よって、$A = E^n$ とすればよい。

B についてもほぼ同じ。
($0 \to E' \to E \to E/E' \to 0$ で E/E' の方に注目すれば ok)

◢

Step 2.

$E \in \mathcal{A}$ をとる。$\mathcal{A}$ の対象の間の全射

$$E \twoheadrightarrow B$$

が次をみたすとき、E の mdq (maximal destabilizing quotient) と呼ぶことにする：

$$\begin{cases} \cdot\ \arg Z(E) \geq \arg Z(B) \\ \cdot\ \forall E \twoheadrightarrow B' \text{ に対して } \arg Z(B') \geq \arg Z(B) \\ \quad \text{さらに } \arg Z(B') = \arg Z(B) \text{ ならば} \\ \quad E \twoheadrightarrow B \twoheadrightarrow B' \text{ と分解する} \end{cases}$$

このとき、$\forall E \in \mathcal{A}$ は mdq を持つ。

$\because$

$E \twoheadrightarrow B$ が mdq ならば、

$\forall B \twoheadrightarrow F$, $\quad \arg Z(F) \geq \arg Z(B)$

となるので B は Z-半安定。

Step 1 より、$E \twoheadrightarrow B$ が mdq かどうかをチェックするには、

Z-半安定な $B' \in \mathcal{A}$ に対しての全射 $E \twoheadrightarrow B'$ に対して

条件をチェックすればよい。

もし E が Z-半安定なら $id : E \to E$ が mdq.

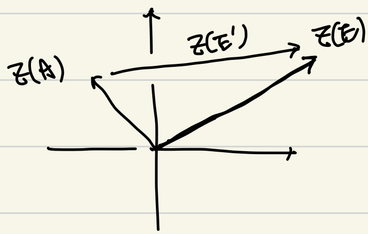
そうでなければ、$\mathcal{A}$ における short exact seq.

$$0 \to A \to E \to E' \to 0$$

であって、

A が Z-半安定で $\arg Z(A) > \arg Z(E)$

かつ $\arg Z(E) > \arg Z(E')$ となるものが存在



$Z(E') = Z(E) - Z(A)$

もし、

「$E' \twoheadrightarrow B$ が mdq ならば

合成 $E \twoheadrightarrow E' \twoheadrightarrow B$ も mdq」

が示せれば、帰納法により step 2 が示せる。

(∵ $E \twoheadrightarrow E^1 \twoheadrightarrow E^2 \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow E^i \twoheadrightarrow E^{i+1} \twoheadrightarrow \cdots$

かつ $\arg Z(E^i) > \arg Z(E^{i+1})$ となる列はどこかで止まる。

よって、$\exists n \in \mathbb{N}$ s.t. E^n は Z-半安定。

$E^n \xrightarrow{id} E^n$ は mdq なので帰納法が使える。)

$E' \twoheadrightarrow B$ が mdq と仮定した上で.

そこで、Z-半安定な B' と、全射 $E \twoheadrightarrow B'$ の存在を仮定.

もし、 $\arg Z(B') \leq \arg Z(B)$ なら

$$\arg Z(A) > \arg Z(E) > \arg Z(E') \geq \arg Z(B) \geq \arg Z(B')$$

このとき、 $0 \to A \to E \to E' \to 0$ と、(Lem (iii)) より

$E \twoheadrightarrow B'$ は $E \twoheadrightarrow E' \twoheadrightarrow B'$ と分解する.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[dr, "0"'] & E \arrow[r] \arrow[d] & E' \arrow[r] \arrow[dl, "\exists"] & 0 \\
 & & B' \arrow[d] & & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

しかし、 $E' \twoheadrightarrow B$ は mdq なので、 $\arg Z(B') \geq \arg Z(B)$ となり

$\arg Z(B) = \arg Z(B')$ を得る.

mdq の定義から、このとき、 $E' \twoheadrightarrow B \twoheadrightarrow B'$ と分解するため

分解 $E \twoheadrightarrow B \twoheadrightarrow B'$ が存在する.

よって、 $E \twoheadrightarrow B$ も mdq ∎

Step 3

$\forall E \in \mathcal{A}$ は HN-filtration を持つ.

$\because$

$E \twoheadrightarrow B^1$ を mdq としてとる.

mdq の定義より. B^1 は Z-半安定.

完全列 $0 \to E^1 \to E \to B^1 \to 0$ をとる.

E^1 が Z-半安定ならば. これが E の HN-filtration.

(i) $0 = E_0 \subset E^1 \subset E$ で.

$F_1 = E^1/E_0 = E^1$, $F_2 = E/E^1 = B^1$ は Z-半安定.

$$\begin{cases} \arg Z(F_1) = \arg Z(E^1) \\ \arg Z(F_2) = \arg Z(B^1) \end{cases}$$ より.

$$\begin{aligned} \arg Z(F_1) &= \arg Z(E^1) \\ &> \arg Z(E) \\ &\geq \arg Z(B^1) = \arg Z(F_2). \end{aligned}$$

E^1 が Z-半安定でなければ、$E^1 \twoheadrightarrow B^2$ を mdq として、
再び完全列

$$0 \to E^2 \to E^1 \to B^2 \to 0$$

を得る。

$Q = E/E^2$ とすると、$E \twoheadrightarrow Q$ があり

$E \twoheadrightarrow B^1$ が mdq なので、定義から $\arg Z(Q) \geq \arg Z(B^1)$

これと、完全列 $0 \to B^2 \to Q \to B^1 \to 0$ から

$$\left(0 \to E^1/E^2 \to E/E^2 \to E/E^1 \to 0 \right)$$

$\arg Z(B^2) \geq \arg Z(Q)$ が得られる。

もし、$\arg Z(B^2) = \arg Z(Q) = \arg Z(B^1)$ なら、

$E \twoheadrightarrow B^1$ が mdq なことから $E \twoheadrightarrow B^1 \to Q$ と分解し、

従って、$B^1 \cong Q$、$B^2 = 0$。

これは、$E^1 \twoheadrightarrow B^2$ が mdq であることに矛盾 $(E^2 = 0)$。

よって、$\arg Z(B^2) > \arg Z(B^1)$

以下、この操作を繰り返して得られる列

$$E \supsetneq E^1 \supsetneq E^2 \supsetneq \cdots \supsetneq E^i \supsetneq E^{i+1} \supsetneq \cdots$$

s.t. $\arg Z(E^{i+1}) > \arg Z(E^i)$

は、条件 (ii) より停留的。

よって、最後に Z-半安定な対象 E^{k-1} を得る。

$E_i := E^{k-i}$ とすれば、求める HN-filtration を得る

□

例 11.3.

A : $\mathbb{C}$ 上の有限次元代数.

$\mathcal{A} :=$ mod-A

このとき. 有限個の simple objects

$$S_1, S_2, \cdots, S_k \in \mathcal{A}$$

が存在して.

$$K(\mathcal{A}) = \bigoplus_{j=1}^{k} \mathbb{Z}[S_j].$$

(Thm 13.5).

各 $1 \leq j \leq k$ に対して $z_j \in \mathbb{H}$ を選び

$$Z : K(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

を. $Z([S_j]) = z_j$ となるように定める.

すると. Z は $\mathcal{A}$ 上の安定性条件を定める.

$E \in \mathcal{A}$ が有限次元ベクトル空間であることに注意すれば.

(Lem 11.2) より HN-filtration が存在する.