超弦理論と関わる数学

セシル☆@sesiru8

目次

1 導入

弦理論とは、物質の基本単位を、大きさが無限に小さな 0 次元の点粒子ではなく 1 次元の拡がりを持った弦であると考える理論である。そこに超対称性という考えを加え、拡張したものが超弦理論である。たったこれだけの仮説が現在、宇宙の姿やその誕生のメカニズムを解き明かし、同時に原子、素粒子といった微小なもののさらにその先の世界を説明する理論の候補として、活発に研究されている。

この超弦理論を考えるとき、理論の整合性のために 10 次元の時空が必要であると言われている (理論の種類により、より多くの次元を必要とするものもある)。私たちの住んでいる世界は 4 次元時空間である。では、残りの 6 次元はどこにあるのだろうか？超弦理論では、それらは量子レベルでコンパクト化され私たちには観測できないと言われている。

また、超弦理論に出てくる 10 次元の中には D ブレーンと呼ばれる様々な次元の拡がり

を持ったソリトン (孤立波) が存在する。弦の中でも、開いた弦はその端が D ブレーンに張り付いており、重力子に対応する閉じた弦は D ブレーンの間を飛び交っていると考えられる。

このような物理の理論としての超弦理論だが、数学的にも非常に魅力的な理論だと言える。超弦理論を詳しく調べようとするとき、我々は最先端の数学に頻繁に出会うことになる。

この講演では、コンパクト化された 6 次元時空間として現れるカラビヤウ空間、D ブレーンの圏に対応する連接層の導来圏など、超弦理論と関わる数学概念を紹介する。

注意 1.1. この講義ノートは「第 8 回関西すうがく徒のつどい」60 分講演のために作られたものに多少加筆修正を加えたものである。よって、細かい議論や正確さを欠いたところが多々ある。おおらかな気持ちで読んでほしい。あまりにも大きな誤解やミスプリント等があれば教えてください。

2　カラビヤウ多様体について

この章ではエルミート多様体、ケーラー多様体、カラビヤウ多様体の順に定義をしていく。

2.1　エルミート多様体

エルミート多様体を定義するために言葉を準備する。

2.1.1　多様体

多様体とは、大雑把に言って「図形＋地図」のことである。大域的には複雑かもしれないが、局所的に見れば $\mathbb{R}^n$ のような分かりやすい構造をしている。しっかりした定義は例えば松本先生の「多様体の基礎 [1]」を参照。

2.1.2　リーマン計量

リーマン計量とは、これも大雑把に表現すると「接空間上の内積」である。高校で習うように、内積があれば長さや角度を計算することができる。そういう意味で、リーマン計量は多様体のものさしのようなものである。

より詳しく、多様体 X の点 x における接空間を T_xX、$V,W \in T_xX$ としたとき

$$g_x(V,W) = \langle V,W \rangle_g$$

と表す。ここでの $\langle \cdot,\cdot \rangle_g$ は高校で習うベクトルの内積と同じである。

2.1.3 概複素構造

定義 2.1. $I \in \mathrm{End}(TX)$ が**概複素構造**であるとは、X の点 x において

$$I_x : T_xX \longrightarrow T_xX$$

であって、$I_x^2 = -id_{T_xX}$ を満たすもののことである。

概複素構造の幾何学的なイメージを説明する。

注意 2.2. X の点 x について $T_xX = \langle v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots w_n \rangle_{\mathbb{R}}$ のとき、$I \in \mathrm{End}(TX)$ が $I_x(v_i) = w_i, I_x(w_i) = -v_i$ を満たすとすると、定義の条件を満たす。

これは複素平面 $\mathbb{C}$ における i のようなもので、$90°$ 回転に対応する。

さて、概複素構造 I とリーマン計量 g が**整合的 (compatible)** であるとは、X の任意の点 x について、T_xX の任意の元 V,W をとったとき $g_x(I_x(V), I_x(W)) = g_x(V,W)$ が成り立つことである。先程の概複素構造の性質と合わせて考えると、これは「**先に $90°$ 回転させてから内積をとっても、そのまま内積をとっても値が同じ**」ということである。

定義 2.3. X を可微分実多様体、g をリーマン計量、I を概複素構造とする。I が可積分であって g と I が整合的であるとき、g を**エルミート計量**、X を**エルミート多様体**という。

概複素構造 I が可積分である、とは I が複素構造になる条件のことである。

2.2 ケーラー多様体

定義 2.4. X をエルミート多様体とする。$\omega := g(I(\cdot), (\cdot))$ とおいて、これを X の**基本形式**という。X の基本形式 ω が $d\omega = 0$ をみたすとき、ω を**ケーラー形式**といい、X を**ケーラー多様体**という。

2.3 カラビヤウ多様体

まず、名前の由来となった定理を紹介する。

定理 2.5. X をコンパクトなケーラー多様体とする。X の第一チャーン類が $c_1(X) = 0$ をみたすとき、X のリッチ形式が $\mathrm{Ric}_\omega = 0$ をみたすようなケーラー形式 ω が唯一つ定まる。

これは、1953 年に Eugenio Calabi(エウジェニオ・カラビ) が予想し、1977 年頃に Shing-Tung Yau(シン＝トゥン・ヤウ) が解決したものである。以下、用語の説明はせずに「リッチ形式が消える」ことの意味を説明する。ヤウ自身は著書「見えざる宇宙のかたち」において、「**空間に物質がなく、真空だったとしても、重力が存在し得る。**」と説明している。リッチ形式が消えることは、アインシュタイン方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu}$$

の第一項が消えることを言っている。さらに真空であるとは右辺が消えることを意味し、上の説明は残った項の非線形偏微分方程式に非自明な解が存在する、ということを言っている。これを踏まえて、カラビヤウ多様体を次のように定義する。

定義 2.6. X をコンパクトなケーラー多様体とする。X の第一チャーン類が $c_1(X) = 0$ をみたすとき、X を**カラビヤウ多様体**という。

以上のことをまとめて、超弦理論で現れる余剰 6 次元が複素 3 次元 (実 6 次元) のカラビヤウ多様体であれば、うまく「物理」ができる。

注意 2.7. 文脈によっては異なる定義を採用する場合がある。

注意 2.8. この定義では複素トーラスは複素 1 次元のカラビヤウ多様体であり、$K3$ 曲面やアーベル曲面は複素 2 次元のカラビヤウ多様体である。

3 D ブレーンと導来圏

圏は、数学的対象をあらわす**対象** (object) とそれらの間の関係を表す**射** (morphism) の集まりによって与えられる。

3.1 D ブレーンの圏

D ブレーンの圏とは、対象として D ブレーン全体、射として弦全体を考えたものである。開弦の端には D ブレーンが張り付いていると考えられる。D とはディリクレ境界条

件のことである。

3.2　連接層の導来圏

以下、簡単のため X をカラビヤウ多様体とする。

3.2.1　連接層

定義 3.1. X 上の**前層** $\mathcal{F}$ とは、X の開集合の圏 $\mathcal{T}op(X)$ からアーベル群の圏 $\mathcal{A}b$ への反変函手である。また前層であって "貼り合わせ条件" をみたすものを**層**という。

連接とは、大雑把に言って "有限生成" のことである。

3.2.2　アーベル圏

アーベル圏とは、これも大雑把に言って「ホモロジー代数が上手く使える圏」のことである。例えば、アーベル圏には $\ker(f)$ や $\mathrm{coker}(f)$ が存在する。X 上の連接層のなす圏を $\mathrm{Coh}(X)$ で表すことにする。これはアーベル圏となる。

3.2.3　ホモトピー圏

まず連接層の複体のなす圏を考える。これは対象が

$$\mathcal{F}^{\bullet} = \{\cdots \to \mathcal{F}^{i-1} \to \mathcal{F}^{i} \to \mathcal{F}^{i+1} \to \cdots\} \tag{3.2.1}$$

のような連接層の複体であり、射は、2 つの複体の間の写像であって、それぞれの "面" が可換になるようなものである。これを「ホモトピー同値」なものを同一視して得られる圏が**ホモトピー圏**である。X 上の連接層の複体のなす圏を $\mathrm{Kom}(\mathrm{Coh}(X))$ とし、それから得られるホモトピー圏を $\mathrm{K}(\mathrm{Coh}(X))$ と表す。

3.2.4　導来圏

X 上の**連接層の導来圏** $\mathcal{D}\,\mathrm{Coh}(X)$ を、対象は $\mathrm{Kom}(\mathrm{Coh}(X))$ や $\mathrm{K}(\mathrm{Coh}(X))$ と同じもので、射の集まりは $\mathrm{K}(\mathrm{Coh}(X))$ における射を**擬同型** (quasi-isomorphism) で局所化したものとする。ここで擬同型とは、同じコホモロジーという情報を持つ複体の間の射のことである。$\mathrm{K}(\mathrm{Coh}(X))$ のままでは擬同型に逆向きの射があるとは限らないので、整数から有理数を作る操作 (局所化) と同じように人工的に逆を付け加える。

つまり、対象について

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{D}\,\mathrm{Coh}(X)) = \mathrm{Ob}(\mathrm{Kom}(\mathrm{Coh}(X))) = \mathrm{Ob}(\mathrm{K}(\mathrm{Coh}(X)))$$

であり、射については

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}\,\mathrm{Coh}(X)}(\mathcal{F}^\bullet,\mathcal{G}^\bullet) = (qis)^{-1}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathrm{Coh}(X))}(\mathcal{F}^\bullet,\mathcal{G}^\bullet))$$

となっている。

3.2.5 圏論的ミラー対称性予想

1994 年、Maxim Kontsevich(マキシム・コンセビッチ) は次のことを予想した。

予想 3.2. X をカラビヤウ多様体とする。このとき、X のミラーペアと呼ばれるカラビヤウ多様体 $X^\vee$ が存在し、X の深谷圏 $\mathrm{Fuk}(X)$ と $X^\vee$ の上の連接層の有界導来圏 $\mathcal{D}^b\,\mathrm{Coh}(X^\vee)$ の間に、三角圏の同値

$$\mathcal{D}^b\,\mathrm{Fuk}(X) \simeq \mathcal{D}^b\,\mathrm{Coh}(X^\vee)$$

が成り立つ。

有界という条件は、複体 (3.2.1) において $|i| \gg 0$ のとき $\mathcal{F}^i = 0$ となることをいう。この予想はより広く、X をシンプレクティック多様体、対応するミラーペア $X^\vee$ を複素多様体としても成り立つと期待されている。位相的弦理論ではシンプレクティック多様体に関するモデルを A モデル、複素多様体に関するモデルを B モデルと呼ぶ。さらに、これらの圏が先に述べた D ブレーンの圏に対応すると言われている。例えば、連接層の導来圏 $\mathcal{D}\,\mathrm{Coh}(X)$ の射は Ext 群で表せるが、これが弦と対応している。さらに反 D ブレーンにはシフト函手が、タキオン系には完全三角が対応するらしい。

D ブレーンの圏と連接層の導来圏は、全ての対象が対応しているわけではない。対応するものを調べるために、物理では「π 安定性」、数学では「Bridgeland 安定性」という概念が使われている。

さらに近年、この超弦理論とラングランズプログラムとのつながりが指摘されている。これについて興味のある方は、エドワード・フレンケルの「数学の大統一に挑む」を読んでみて欲しい。

参考文献

[1] 多様体の基礎、松本 幸夫 著、東京大学出版会、1988.

[2] 見えざる宇宙のかたち、シン=トゥン・ヤウ 著 、スティーヴ・ネイディス 著 、水谷 淳 訳、岩波書店、2012.

[3] 数学の大統一に挑む、エドワード・フレンケル 著、青木 薫 訳、文藝春秋、2015.

[4] *Dirichlet branes and mirror symmetry*, Clay Mathematics Monographs 4, American Mathematical Society, Providence, RI; Clay, Mathematics Institute, Cambridge, MA, 2009, x+681.