§ 8. The dual abelian Variety ; char. 0.

$$\begin{array}{rccl} \phi_L : & X & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(X) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & [T_x^* L \otimes L^{-1}] \end{array}$$ だった.

Def

$\mathrm{Pic}^0(X) := \{ [L] \in \mathrm{Pic}(X) \mid \phi_L \equiv 0 \}$

($\mathrm{Pic}(X)$ の部分群)

Thm. of Square により, $\forall y \in X$,

$$\begin{aligned} \phi_{[T_x^* L \otimes L^{-1}]}(y) &= T_y^*(T_x^* L \otimes L^{-1}) \otimes (T_x^* L \otimes L^{-1})^{-1} \\ &= T_{x+y}^* L \otimes T_y^*(L^{-1}) \\ &\qquad \otimes T_x^*(L^{-1}) \otimes L \\ &\cong \mathcal{O}_X . \end{aligned}$$

$T_x^* L \otimes T_y^* L \simeq T_{x+y}^*(L) \otimes L$

i.e., $\mathrm{Im}\, \phi_L \subseteq \mathrm{Pic}^0(X)$

$\therefore$ $$\begin{array}{ccccccc} 0 \to \mathrm{Pic}^0(X) & \to & \mathrm{Pic}(X) & \to & \mathrm{Hom}(X, \mathrm{Pic}^0(X)) \\ & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & & L & \longmapsto & \phi_L \end{array}$$

は完全.

目標

Char$(k)=0$ の場合に、$\mathrm{Pic}^0(X)$ が X の「双対」アーベル多様体 $\widehat{X}$ と自然に同型であることを示す。

Prop 8.1

$L \in \mathrm{Pic}^0(X) \iff T_x^* L \simeq L$ for all $x \in X$

$\iff m^* L \simeq p_1^* L \otimes p_2^* L$ on $X \times X$

[Proof]

Claim

「$m^* L \simeq p_1^* L \otimes p_2^* L$」

$\iff$

「$M := m^* L \otimes p_1^* L^{-1} \otimes p_2^* L^{-1}$ として

$M|_{X \times \{a\}}$, $M|_{\{0\} \times X}$ が trivial」

$(\forall a \in X)$

($\Rightarrow$) 明らか。

[$\Leftarrow$] See-saw thm より、

$\exists N \in \mathrm{Pic}(X)$ s.t. $M = p_2^* N$

$M|_{\{0\} \times X} = (p_2^* N)|_{\{0\} \times X} = N$ が trivial.

$\therefore$ M trivial.

◀

一方，
$$\begin{cases} M|_{\{0\}\times X} \simeq T_0^* L \otimes L^{-1} = \mathcal{O}_X \\ M|_{X\times\{a\}} \simeq T_a^* L \otimes L^{-1} \end{cases}$$

$\therefore$ 「$m^* L \simeq p_1^* L \otimes p_2^* L$ on $X \times X$」

$$\Leftrightarrow$$

「$T_a^* L \simeq L$ for all $a \in X$」

「$L \in \mathrm{Pic}^0(X)$」 $\Leftrightarrow$ 「$T_x^* L \simeq L$ for all $x \in X$」

は $\mathrm{Pic}^0(X)$ の定義. $\square$

Prop 8.2

$L \in \mathrm{Pic}^0(X)$ とする.

$\forall S$: scheme,

$\forall f, \forall g : S \to X$; morphism に対し.

$(f+g)^* L \simeq f^* L \otimes g^* L$

[Proof] (Prop 8.1) より 「$L \in \mathrm{Pic}^0(X)$」 $\Leftrightarrow$ 「$m^* L \simeq p_1^* L \otimes p_2^* L$」

$$\begin{array}{ccccc} S & \xrightarrow{(f,g)} & X \times X & \xrightarrow{p_2} & X \ni g(s) \\ & & & \xrightarrow{m} & X \ni f(s)+g(s) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ s & \longmapsto & (f(s), g(s)) & \xrightarrow{p_1} & X \ni f(s) \end{array}$$

$m^* L \otimes p_1^* L^{-1} \otimes p_2^* L^{-1}$ $(\simeq \mathcal{O}_{X\times X})$ を (f,g) で引き戻すと.

$\boxed{\begin{array}{l}(m\circ(f,g))^* \\ = (f,g)^* \circ m^*\end{array}}$ $(f+g)^* L \otimes f^* L^{-1} \otimes g^* L^{-1}$ $(\simeq \mathcal{O}_S)$ $\square$

$$L \otimes \underbrace{(-1_X)^* L}_{\simeq L^{-1}} \simeq (1+(-1))_X^* L = 0_X^* L \simeq \mathcal{O}_X$$

Prop 8.3

$L \in \mathrm{Pic}^0(X) \Rightarrow n_X^* L \simeq L^n.$

[Proof]

$n=1$ のとき 明らか.

$n=k$ を仮定して. $n=k+1$ のとき.

$$\begin{aligned}(k+1)_X^* L &\simeq (k+1)_X^* L \\ &\simeq k_X^* L \otimes 1_X^* L \\ &\simeq L^k \otimes L \simeq L^{k+1}\end{aligned}$$

□

($n \leq 0$ のときも同様)

Prop 8.4

$\forall L \in \mathrm{Pic}(X),$

$n_X^* L \simeq L^{n^2} \otimes$ ($\mathrm{Pic}^0(X)$ の元)

[Proof]

(§6, Cor 3) より.

$$\begin{aligned}n_X^* L &\simeq L^{\left(\frac{n^2+n}{2}\right)} \otimes (-1_X)^* L^{\left(\frac{n^2-n}{2}\right)} \\ &\simeq L^{n^2} \otimes \left(L \otimes (-1_X)^* L^{-1}\right)^{\left(\frac{n^2-n}{2}\right)}\end{aligned}$$

よって. $L \otimes (-1_X)^* L^{-1} \in \mathrm{Pic}^0(X)$ が示せればよい.

実際,

$T_{-x}(p) = p - x$

$(-1)\cdot T_{-x}(p) = x - p = T_x(-p)$

$= T_x((-1)(p))$

$T_x^*(L \otimes (-1_X)^* L^{-1})$

$\simeq T_x^* L \otimes (-1_X)^* T_{-x}^* L^{-1}$

$\simeq T_x^* L \otimes \underbrace{(-1_X)^* (L \otimes T_{-x}^* L^{-1})}_{\in \mathrm{Pic}^\circ(X)} \otimes (-1_X)^* L^{-1}$.

$\simeq \underbrace{T_x^* L \otimes L^{-1} \otimes T_{-x}^* L}_{L} \otimes (-1_X)^* L^{-1}$.

$\simeq L \otimes (-1_X)^* L^{-1}$ Thm. of square.

□

Prop 8.5

$L \in \mathrm{Pic}(X)$ が有限位数を持つ元ならば.

$L \in \mathrm{Pic}^\circ(X)$

(∵)

$L^n \simeq \mathcal{O}_X$ ならば. $\forall x \in X$,

$0 = \phi_{L^n}(x) = n\, \phi_L(x)$ (∵ $\phi_{L_1 \otimes L_2} = \phi_{L_1} + \phi_{L_2}$)

$= \phi_L(nx)$ (Cor 4 より. ϕ_L は group hom.)

X は divisible なので. $\phi_L \equiv 0$.

$\therefore \quad L \in \mathrm{Pic}^\circ(X)$

□

(X が divisible $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $nX = X$ for $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.)

$nx = y$

Prop 8.6

「$\forall S$; 代数的多様体.
$\forall L$; $X \times S$ 上の line bundle,
$L_s := L|_{(X \times \{s\})}$ とおけば,
$L_{s_1} \otimes L_{s_0}^{-1} \in \mathrm{Pic}^\circ(X) \quad (\forall s_0, s_1 \in S)$ 」

i.e., 1つの fiber が $\mathrm{Pic}^\circ(X)$ の元ならば,
他の fiber も $\mathrm{Pic}^\circ(X)$ の元.

(∵)

問題は局所的なので, $L|_{\{0\} \times U}$ が trivial になるような open subvariety $U \subseteq S$ におきかえてよい.

よって, $L|_{\{0\} \times S}$ は trivial としてよい.

さらに, L を $(L \otimes p_1^*(L_{s_0}^{-1}))$ におきかえて.
L_{s_0} が trivial であるとしてよい.

$(\ L \otimes p_1^*(L_{s_0}^{-1})|_{X \times \{s_0\}} = L_{s_0} \otimes L_{s_0}^{-1} \simeq \mathcal{O}_X\ )$

この条件の下で,

$$L_s \in \mathrm{Pic}^\circ(X) \qquad \text{for all } s \in S$$

を示す.

Claim

$^\forall s \in S$, $X \times X$ 上の line bundle

$$m^*(L_s) \otimes p_1^*(L_s^{-1}) \otimes p_2^*(L_s^{-1})$$

は trivial.

(Prop 8.1 の同値性

$L_s \in \mathrm{Pic}^0(X) \iff m^*(L_s) \simeq p_1^*(L_s) \otimes p_2^*(L_s)$ on $X \times X$)

(∵) $X \times X \times S$ 上の line bdl.

$$M := \mu^* L \otimes p_{13}^* L^{-1} \otimes p_{23}^* L^{-1}$$

(L は $X \times S$ 上)

$$\begin{cases} \mu(x, y, s) = (x+y, s) \\ p_{13}(x, y, s) = (x, s) \\ p_{23}(x, y, s) = (y, s) \end{cases}$$

$M|_{X \times \{0\} \times S} = L \otimes L^{-1} \otimes \mathcal{O}_{X \times S}$

($L|_{\{0\} \times S} \simeq \mathcal{O}_S$)

を考える。このとき,

$X \times \{0\} \times S$, $\{0\} \times X \times S$, $X \times X \times \{s_0\}$

上で M は trivial.

よって, Thm. of Cube より M は trivial.

$$M|_{X \times X \times \{s\}} = m^*(L_s) \otimes p_1^*(L_s^{-1}) \otimes p_2^*(L_s^{-1})$$

$\therefore$ $m^*(L_s) \otimes p_1^*(L_s^{-1}) \otimes p_2^*(L_s^{-1})$ trivial ▲

以上より, $L_s \in \mathrm{Pic}^0(X)$

□

Prop 8.7

$\mathcal{O}_X \neq L \in \mathrm{Pic}^0(X)$ について、

$H^i(X, \mathcal{L}) = (0)$ for all i.

[Proof]

$H^0(X, \mathcal{L}) \neq 0$ ならば、

$\exists$ effective divisor D s.t. $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_X(D)$.

このとき、 $\mathcal{L}^{-1} \overset{\text{Prop 8.3}}{\simeq} (-1_X)^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_X((-1_X)^*D)$

よって、

$$\mathcal{O}_X \simeq \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1} \simeq \mathcal{O}_X(D + (-1_X)^*D)$$

$\therefore$ $D + (-1_X)^*D = 0$

D が effective divisor なので $(-1_X)^*D$ も effective.

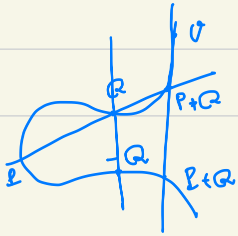
$\therefore$ $D = 0$.

$\therefore$ $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_X$ これは仮定に矛盾.

$$\therefore \quad H^0(X, L) = (0).$$

次に、 k を、 $H^k(X, L) \neq (0)$ なる最小の整数とする.

例



$$a[Q] \overset{(-1)^*}{\longmapsto} a[-Q]$$

$$\begin{array}{cccc} s_1 : & X & \longrightarrow & X \times X \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & (x, 0) \end{array}$$ とする.

Prop 8.1 より $L \in \mathrm{Pic}^0(X) \iff m^*L \simeq p_1^*L \otimes p_2^*L$.

ゆえに、Künneth の公式 により.

$$X \xrightarrow{s_1} X \times X \xrightarrow{m} X$$

$$\begin{array}{ccccc} H^k(X, L) & \xleftarrow{s_1^*} & H^k(X \times X, m^*L) & \xleftarrow{m^*} & H^k(X, L) \\ & & \wr\| & & \\ & & H^k(X \times X, p_1^*L \otimes p_2^*L) & & \\ & & \wr\| & & \\ & & \sum_{i+j=k} \left(H^i(X, L) \otimes H^j(X, L) \right) & & \end{array}$$

一方. $m \circ s_1 = id_X$, $s_1^* \circ m^* = id_{H^k(X,L)}$ つまり.

$$H^k(X, L) \xrightarrow{s_1^* \circ m^*} H^k(X, L)$$ は identity.

ここで. $i + j = k \geqq 1$ より. $i < k$, $j < k$.

$\therefore$ $H^i(X, L) \otimes H^j(X, L) = (0)$.

($\because$ k のとりかたから. $H^i(X, L) = (0)$ for $i < k$).

$$\begin{tikzcd} H^k(X, \mathcal{L}) \arrow[rr, "s_1^* \circ m^*"] \arrow[dr] & \circlearrowleft & H^k(X, \mathcal{L}) \\ & (0) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$\therefore$ $s_1^* \circ m^* = \mathrm{id}$ が (0) を経由するので.

$$H^k(X, \mathcal{L}) = (0).$$

$\square$

<u>Thm 1</u>

L : ample line bundle.

$M \in \mathrm{Pic}^0(X)$ とする. このとき.

$\exists x \in X$ s.t. $M \simeq T_x^* L \otimes L^{-1}$.

i.e., $\phi_L : X \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(X)$ は全射.

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathrm{Pic}^0(X) \\ \cup & & \cup \\ x & \longmapsto & [T_x^* L \otimes L^{-1}] \end{array}$$

[アイデア]

$X \times X$ 上の line bundle

$$K = m^* L \otimes p_1^* L^{-1} \otimes p_2^* (L^{-1} \otimes M^{-1})$$

のコホモロジーを2通りで計算して比較.

$$\left(\begin{array}{l} K|_{\{x\} \times X} \simeq T_x^* L \otimes (L^{-1} \otimes M^{-1}) \\ K|_{X \times \{x\}} \simeq T_x^* L \otimes L^{-1} \end{array} \right)$$

(1) $H^{l}(X, R^{k}p_{1*}(\mathcal{K})) \Rightarrow H^{k+l}(X\times X, \mathcal{K})$

(2) $H^{l}(X, R^{k}p_{2*}(\mathcal{K})) \Rightarrow H^{k+l}(X\times X, \mathcal{K})$

定義から、 $(K = m^{*}L \otimes p_1^{*}L^{-1} \otimes p_2^{*}(L^{-1}\otimes M^{-1}))$

$$
{}^{\forall}x \in X \quad \begin{cases} K|_{\{x\}\times X} \simeq (T_x^{*}L \otimes L^{-1}) \otimes M^{-1} \\ K|_{X\times\{x\}} \simeq T_x^{*}L \otimes L^{-1}. \end{cases}
$$

(背理法で示す) ${}^{\forall}x \in X$, $M \neq (T_x^{*}L \otimes L^{-1})$ と仮定.

このとき、 $K|_{\{x\}\times X}$ は 各 $x \in X$ について、

$\mathrm{Pic}^{0}(X)$ の 非自明な 元 を 定める.

$(T_x^{*}L \otimes L^{-1},\ M \in \mathrm{Pic}^{0}(X))$

(Prop 8.7) より、 $K|_{\{x\}\times X}$ の コホモロジー は 全て (0).

(§5. Cor 2) より $R^{k}p_{1*}(\mathcal{K}) = (0)$ for all k.

$\therefore$ $H^{k}(X\times X, \mathcal{K}) = (0)$ by (1).

次に (2) を使う;

$$x \notin K(L) := \ker(\phi_L) = \{x \in X \mid T_x^* L \simeq L\}$$

とすると.

$T_x^* L \otimes L^{-1}$ は non trivial な $\mathrm{Pic}^0(X)$ の元.

$\Rightarrow H^k(T_x^* L \otimes L^{-1}) = (0)$

$$\therefore \quad \mathrm{Supp}(R^k p_{2*}(\mathcal{K})) \subset K(L).$$

$$\left(\mathcal{K}|_{X \times \{x\}} \simeq T_x^* L \otimes L^{-1} \simeq (R^k p_{2*}(\mathcal{K}))_x \right)$$

$K(L)$ は有限集合なので.

$$\bigoplus_{x \in K(L)} R^k p_{2*}(\mathcal{K})_x \simeq H^k(X \times X, \mathcal{K})$$

ここで, (1) より. $H^k(X \times X, \mathcal{K}) = (0)$.

$$\therefore \quad R^k p_{2*}(\mathcal{K}) = (0).$$

$$\therefore \quad H^k(X, \mathcal{K}|_{X \times \{x\}}) = (0) \quad \text{for all } x.$$

by (§5. Cor 4).

しかし. $\mathcal{K}|_{X \times \{0\}} \simeq T_0^* L \otimes L^{-1} \simeq \mathcal{O}_X$

$\therefore \quad H^0(X, \mathcal{K}|_{X \times \{0\}}) \neq (0)$. で矛盾.

$(H^0(X, \mathcal{O}_X) = k)$

$\exists x \in X$,

$$\therefore \quad M \simeq T_x^* L \otimes L^{-1}$$

$(= \phi_L(x))$

□

$$0 \to K(L) \to X \to \mathrm{Pic}^0(X) \to 0 \quad (\text{exact})$$

より．抽象群として．$\mathrm{Pic}^0(X) \simeq X/K(L)$.

Q.

$\hat{X}$ を $\mathrm{Pic}^0(X)$ と（抽象群として）同型なアーベル多様体としたとき，$\hat{X}$ を特徴づける性質は何か？

$\longrightarrow$ Poincaré bundle P との組 $(\hat{X}, P)$ を考えると同型を除いて一意に定まる．

Def X：アーベル多様体．

次の性質を持つ．アーベル多様体 $\hat{X}$ と．$X \times \hat{X}$ 上の line bdl. P の組 $(\hat{X}, P)$ を考える；

(i) ${}^{\forall}\alpha \in \hat{X}$, $P|_{X \times \{\alpha\}} =: P_\alpha$ は．$\mathrm{Pic}^0(X)$ の元 $[\alpha]$ に対応．$(\mathrm{Pic}^0(X) \cong \hat{X})$

(ii) $P|_{\{0\} \times \hat{X}} \simeq \mathcal{O}_{\hat{X}}$.

(iii) (Universality)

$^\forall S$: normal variety, $^\forall K$: $X \times S$ 上の line bdl.

s.t.

$$\begin{cases} \text{(i)} & K_s := K|_{X\times\{s\}} \in \mathrm{Pic}^\circ(X) \quad \text{for all } s \in S. \\ \text{(ii)} & K|_{\{0\}\times S} \text{ は trivial} \end{cases}$$

に対し. $^\exists ! \, f : S \to \hat{X}$; (set-theoretical) map

s.t.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[dr, bend right, "s \mapsto K|_{X\times\{s\}}"'] & \hat{X} \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & \mathrm{Pic}^\circ(X) \end{tikzcd}$$

$$(K_s \simeq P_{f(s)})$$

かつ,

$$K \simeq (1_X \times f)^* P.$$

(i)(ii) と See-Saw Thm. より. 組 $(\hat{X}, P)$ は

存在すれば同型を除いて唯一つ.

この $\hat{X}$ を X の <u>双対アーベル多様体</u>.

P を <u>Poincaré bundle</u>

という.

[存在 (構成)]

L ; X 上の ample line bundle とし、

$\hat{X} := X/K(L)$ とおく。 (§7)

$\pi : X \longrightarrow \hat{X}$; 自然な morphism とする。

(§7. Prop 2) を用いて P を構成する。

具体的には、 $(1_X \times \pi)^* P$ が、 $X \times X$ 上、

$$K = m^* L \otimes p_1^* L^{-1} \otimes p_2^* L^{-1}$$

と同型となるように構成する。

$\because$ Def (iii) (universality) において、

$S = X$, $K = m^* L \otimes p_1^* L^{-1} \otimes p_2^* L^{-1}$ とすると、

$f = \pi : X \longrightarrow \hat{X}$

$$\begin{cases} K|_{X \times \{x\}} = (m^* L \otimes p_1^* L^{-1} \otimes p_2^* L^{-1})|_{X \times \{x\}} \\ \qquad = T_x^* L \otimes L^{-1} \in \mathrm{Pic}^0(X) \\ K|_{\{0\} \times X} = T_0^* L \otimes L^{-1} \simeq \mathcal{O}_X \end{cases}$$

$\therefore$ $K \simeq (1_X \times \pi)^* P$.

$$\begin{tikzcd} K, (1_X \times \pi)^* P \arrow[dr] & \\ & X \times X \circlearrowleft \{0\} \times K(L) \arrow[d, "(1_X \times \pi)"] \\ P \arrow[dr] & \\ & X \times \hat{X} = (X \times X) / (\{0\} \times K(L)) \end{tikzcd}$$

$\circlearrowleft$?

$X \times X$ への $\mathrm{Ker}(1_X \times \pi) = \{0\} \times K(L)$ の作用が

K 上の作用に持ち上がることを見る.

${}^\forall a \in K(L)$,

$$\begin{aligned} T_{(0,a)}^* K &\simeq (T_{(0,a)}^* m^* L) \otimes (T_{(0,a)}^* p_1^* L^{-1}) \otimes (T_{(0,a)}^* p_2^* L^{-1}) \\ &\simeq m^* T_a^* L \otimes p_1^* L^{-1} \otimes p_2^* T_a^* L^{-1} \\ &\simeq m^* L \otimes p_1^* L^{-1} \otimes p_2^* L^{-1} = K \end{aligned}$$

($a \in K(L)$ より, $T_a^* L \simeq L$)

$\therefore$ $T_{(0,a)}^* K \simeq K$ より, 自己同型

$$\phi_a : K \longrightarrow K$$

が存在.

$$\left(\begin{array}{l} T_{(0,a)} : X \times X \longrightarrow X \times X \quad \text{と compatible} \\ \qquad\qquad (x, y) \longmapsto (x, y+a) \end{array} \right)$$

$$K|_{\{0\}\times X} \simeq m^*L|_{\{0\}\times X} \otimes p_1^*L^{-1}|_{\{0\}\times X} \otimes p_2^*L^{-1}|_{\{0\}\times X}$$

$$\simeq L \otimes \begin{pmatrix} \text{trivial bundle} \\ L^{-1}(0)\times X \end{pmatrix} \otimes L^{-1}$$

$$\simeq L^{-1}(0) \times X. \qquad (\text{trivial})$$

(ここで、$L^{-1}(0)$ は、L^{-1} の (0) における fiber).

より、$\phi_a \in \mathrm{Aut}(K)$ を $\{0\}\times X$ に制限したとき、

$$\begin{array}{cccc} \phi_a|_{L^{-1}(0)\times X} : & L^{-1}(0)\times X & \longrightarrow & L^{-1}(0)\times X \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & (\lambda, x) & \longmapsto & (\lambda, x+a) \end{array}$$

となるようにすれば、結合律

$$\phi_a \circ \phi_b = \phi_{a+b}$$

をみたすような唯一つの自己同型 $\{\phi_a\}_{a\in K(L)}$ が定まる。

これにより、$\mathrm{Ker}(1_X \times \pi)$ の K への作用が定まり、

$$(1_X \times \pi)^* P \simeq K$$

となるような $X \times \hat{X}$ 上の line bundle P が得られた。

[P が 性質 (i) (ii) (iii) を満たすこと]

(Def)

(i) について

$\forall \alpha \in \hat{X}$, $\alpha = \pi(x)$ とおけば.

$$
\begin{aligned}
P_\alpha &:= P|_{X \times \{\alpha\}} \\
&\simeq (1_X \times \pi)^*(P)|_{X \times \{x\}} \\
&\simeq T_x^* L \otimes L^{-1} \\
&= \phi_L(x) \in \mathrm{Pic}^0(X).
\end{aligned}
$$

よって.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Pic}^0(X) \ni [T_x^* L \otimes L^{-1}] = \phi_L(x) \arrow[dd, equal, "\wr"'] \\
x \in X \arrow[urr, "\phi_L"] \arrow[drr, "\pi"'] & \circlearrowright & \\
 & & \hat{X} \ni \alpha = \pi(x)
\end{tikzcd}
$$

となるように $\hat{X}$ と $\mathrm{Pic}^0(X)$ を同一視すれば.

P は (i) を満たすことが分かる.

(ii) について

$$P|_{\{0\}\times\hat{X}} = K|_{\{0\}\times X} \Big/ \ker(\pi)$$

だった。

つまり、 $K|_{\{0\}\times X} \simeq L^{-1}(0)\times X$ を

$\left(1 \times K(L) \circlearrowleft\right)$ $\quad L^{-1}(0)\times X \longrightarrow L^{-1}(0)\times X$

$\qquad\qquad\qquad\qquad (\lambda, x) \longmapsto (\lambda, x+a)$

で割ったものが $P|_{\{0\}\times\hat{X}}$.

$$\therefore \quad P|_{\{0\}\times\hat{X}} \simeq L^{-1}(0)\times X/K(L) = L^{-1}(0)\times\hat{X}$$

つまり $P|_{\{0\}\times\hat{X}}$ は trivial

(iii) について.

与えられた S, K について. $X \times S \times \hat{X}$ 上の line bdl.

$$E = p_{12}^*(K) \otimes p_{13}^*(P^{-1})$$

を考える.

$$\begin{tikzcd}
 & E = p_{12}^*(K) \otimes p_{13}^*(P^{-1}) \arrow[d] & \\
 & X \times S \times \hat{X} \arrow[dl, "p_{12}"'] \arrow[dr, "p_{13}"] & \\
X \times S \arrow[from=u, phantom] & & X \times \hat{X}
\end{tikzcd}$$

$K \to X \times S$, $P \to X \times \hat{X}$

このとき. $E|_{X \times \{s, \alpha\}} \simeq K_s \otimes P_\alpha^{-1}$.

$S \times \hat{X}$ の部分集合

$$\Gamma = \{ (s, \alpha) \in S \times \hat{X} \mid E|_{X \times \{s, \alpha\}} \text{ trivial} \}$$

は. See-Saw thm. より $S \times \hat{X}$ の Zariski 閉集合.

ここで, 「$E|_{X \times \{s, \alpha\}}$ が trivial」

$\iff$

「$K_s \simeq P_\alpha$」

ゆえに，Γ は（集合としての）写像

$$\begin{array}{rccc} f : & S & \longrightarrow & X \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & s & \longmapsto & \alpha \end{array}$$

のグラフ．

特に，射影

$$p_1 : \Gamma \longrightarrow S$$

は集合として全単射．

今，Char$(k) = 0$ なので．(!)　Γ と S は双有理同値．

また，S が正規代数的多様体なので．

Zariski の主定理（ZMT）により，Γ と S は

代数的多様体として同型．　$(p_1 : \Gamma \xrightarrow{\sim} S)$

$$p_2 : \Gamma \to \hat{X}$$ とすると．

$f = p_2 \circ p_1^{-1}$ として $f : S \to \hat{X}$ は代数的多様体

の間の射を定める．

See-Saw Thm. とから．(iii) が従う □

（$K \simeq (1_X \times f)^* P$．

[ZMT の部分補足]

射影 $p_1 : \Gamma \longrightarrow S$ について.

集合として全単射なので. 分離次数 1. $(\# p_1^{-1}(x) = 1)$

$\mathrm{Char}(k) = 0$ より. $\deg(p_1) = 1$. とくに双有理同値.

(k : 完全体 i.e., どんな代数拡大も分離的)

ここで, ZMT は.

Thm (ZMT) (Milne AG 8.16)

代数的多様体間の任意の準有限射

$$\varphi : W \longrightarrow V$$

は.

$$\begin{cases} \varphi' : \text{有限射} \\ \iota : \text{開埋め込み} \end{cases}$$

として.

$$W \overset{\iota}{\hookrightarrow} W' \xrightarrow{\varphi'} V$$

と分解する.

($\varphi : W \to V$ の fiber がすべて有限のとき.
φ は quasi-finite という.)

Cor (Milne AG 8.19)

$\varphi : W \to V$; 既約な代数多様体の間の双有理射とする。

もし、

(a) V が正規

(b) φ が準有限射

なら、

φ は V の open subset と W との同型を与える。