§6. The Theorem of the Cube : I.

Thm (Cube の定理)

X, Y : 完備代数的多様体

Z : 任意の代数的多様体.

$x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, $z_0 \in Z$; closed points.

このとき.

「$X \times Y \times Z$ 上の line bundle L が trivial」

$$\Longleftrightarrow$$

「次の3つの line bundles がすべて trivial ;

$L|_{\{x_0\} \times Y \times Z}$, $L|_{X \times \{y_0\} \times Z}$, $L|_{X \times Y \times \{z_0\}}$」

[Proof]

"See-saw thm" により,

「$\forall (x, z) \in X \times Z$,

$L|_{\{x\} \times Y \times \{z\}}$ が trivial」

を示せばよい.

$\because$ $(X \times Z) \times Y$ とみて See-Saw thm を用いると、

$$(X \times Z)_1 = \{ (x, z) \in X \times Z \mid L|_{(\{x\} \times \{z\}) \times Y} \text{ が trivial} \}$$

は $X \times Z$ の空でない閉集合で、$X \times Z$ と一致。

さらに、

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & {}^{\exists} M \arrow[d] \\ X \times Y \times Z \arrow[r, "p_{13}"] & X \times Z \\ & X \times \{y_0\} \times Z \arrow[u, "\wr"] \arrow[ul, bend left] \end{tikzcd}$$

$(L = p_{13}^{*} M)$

$L|_{X \times \{y_0\} \times Z}$ が trivial ならば M も trivial。

$\therefore$ L も trivial。 ∎

さらに、次の Lem を用いて、X は non-sing. curve としてよい。

Lem

> X : 任意の代数多様体.
> $x_0, x_1 \in X$ とする.
> このとき.
> X 上の既約曲線 C で. x_0, x_1 を含むもの
> が存在する.

∵

$\dim X = 1$ のときは明らかなので. $\dim X > 1$ としてよい.
(Chowの補題) により. X は射影的としてよい.
さらに. $\dim X$ について帰納法を用いることで.
X の sub variety Y
s.t. $\mathrm{codim}_X(Y) = 1$, $x_0, x_1 \in Y$
の存在が示せば十分.
($x_0 \neq x_1$ として OK).

X の 2点 $\{x_0, x_1\}$ での blowing-up
$$f : X' \longrightarrow X$$
を考える.
X : projective より X' も projective.
かつ. $\dim f^{-1}(x_i) \geqq 1$. $(i = 0, 1)$.

$X' \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ を閉埋め込みとすると、

Bertini の定理により

超平面 $X \subset \mathbb{P}^N$ で、

$$H \cap X' = Y'$$

が既約であるものが存在。

$\dim f^{-1}(x_i) \geq 1$ だったので、

$$H \cap f^{-1}(x_i) \neq \phi.$$

$\therefore$ $Y := f(Y')$ は X の既約な subvariety で、

$x_0, x_1 \in Y.$ $\quad (\operatorname{codim}_X(Y) = 1)$

x と x_0 を結ぶ X の curve C_1 をとる。

$\pi : C \longrightarrow C_1$; C_1 の正規化。

$$\pi' : C \times Y \times Z \longrightarrow X \times Y \times Z$$

とする。

このとき、$(\pi')^*(L)$ は Cube thm の仮定を満たしている。

ゆえに、

もし、$L|_{C \times Y \times Z}$ が trivial であれば、

$\forall x \in X,\ z \in Z$, $L|_{\{x\} \times Y \times \{z\}}$ が trivial

が言える。（つまり、X は C に取り替えてよい）

以下, X は完備非特異曲線とする.

さらに Z は z_0 を含む空でない開集合 Z' に取り替えてよい.

(∵)

$$Z_1 := \{ z \in Z \mid L|_{(X\times Y)\times\{z\}} \text{ が trivial} \}$$

は, See-saw thm より Z の開集合, $\{z_0\} \in Z_1$

Z の既約性から, Z_1 が Z' を含めば Z 全体に一致.

結局, X, Z を上のようにとって, $X\times Y\times Z$ 上の line bundle L が trivial になることを示せば OK.

Claim

$\forall (y, z) \in Y\times Z$,

$L_{(y,z)} := L|_{X\times\{y\}\times\{z\}}$ は trivial

(∵)

Step 1

上手い L の twist L' を構成する.

Ω_X^1 : X 上の 正則 1 形式 のなす層.

$g := \dim H^0(X, \Omega_X^1)$ とする.

このとき. X の 点 $P_1, \cdots, P_g$ で.

因子 $D = \sum_{i=1}^{g} P_i$, $\dim H^0(X, \Omega_X^1 \otimes \mathcal{O}_X(-D)) = 0$.

なるものがとれる.

$$\left(\begin{array}{l} \because \quad H^0(X, \Omega^1) \text{ の 基底 } \omega_1, \cdots, \omega_g \text{ に対し.} \\ \qquad X^g = X \times \cdots \times X \\ \qquad p_i : X^g \to X \quad \text{ に対し.} \\ \qquad X^g \setminus \left(\operatorname{Supp} \left(\begin{vmatrix} p_1^* \omega_1 & \cdots & p_1^* \omega_g \\ \vdots & & \vdots \\ p_g^* \omega_1 & \cdots & p_g^* \omega_g \end{vmatrix} \right) \right) \text{ から} \\ \qquad (P_1, \cdots, P_g) \text{ を 取ってくる.} \end{array} \right)$$

$$p_1 : X \times Y \times Z \longrightarrow X$$

として. $$L' = L \otimes p_1^* \mathcal{O}_X(D)$$ とおく.

$$\left(\begin{array}{l} 0 \to \Omega_X^1 \otimes \mathcal{O}_X(-P) \to \Omega_X^1 \to \Omega_X^1 \otimes \mathcal{O}/\mathcal{O}(-P) \to 0 \\ \qquad H^0(X, \Omega_X^1 \otimes \mathcal{O}/\mathcal{O}(-P)) = H^0(P, \Omega_X^1|_P) \cong k \end{array} \right)$$

$$L'_{(y,z)} := L'|_{X \times \{y\} \times \{z\}}$$ とおく。

$$L'_{(y,z_0)} = p_1^*(\mathcal{O}_X(D))$$ より

$$\dim H^1(X, L'_{(y,z_0)}) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X(D))$$
$$= \dim H^0(X, \Omega_X^1 \otimes \mathcal{O}_X(-D)) = 0.$$

従って

$$F := \{ (y,z) \in Y \times Z \mid \dim H^1(X, L'_{(y,z)}) \geq 1 \}$$

は $Y \times \{z_0\}$ と共通部分を持たない。 $\left((Y \times \{z_0\}) \cap F = \phi \right)$

上半連続性により、F は閉集合。

一方、Y は完備なので、

$^\exists Z' \subset Z$: 閉集合

s.t.

$z_0 \in Z'$, $(Y \times Z') \cap F = \phi$.

よって、Z を Z' に取り替えることで、

$$^\forall (y,z) \in Y \times Z, \quad H^1(X, L'_{(y,z)}) = 0$$

としてよい。

このとき、上半連続性で Euler 標数が定数になることにより、

$^\forall (y, z) \in Y \times Z$

$$\begin{aligned}\dim H^0(X, L'_{(y,z)}) &= \chi(L'_{(y,z)}) \\ &= \chi(L'_{(y_0,z_0)}) \\ &= \chi(\mathcal{O}_X(D)) \\ &= 1 - g + \deg(D) \\ &= 1\end{aligned}$$

よって、(Cor 2) を

$$p_{23} : X \times Y \times Z \longrightarrow Y \times Z$$

に用いることで、$p_{23*}(L')$ は $Y \times Z$ 上の可逆層で（直線束）、

$^\forall (y, z) \in Y \times Z$,

$$p_{23*}(L') \otimes k(y,z) \xrightarrow{\sim} H^0(X, L'_{(y,z)}) .$$

Step 2

$$\boxed{L'_{(y,z)} \cong \mathcal{O}_X(D)} \qquad (\Leftrightarrow \ L_{(y,z)} \cong \mathcal{O}_X)$$

$\{U_i\}$: $Y \times Z$ の open covering

s.t. $p_{23*}(L'_{(y,z)})|_{U_i} \cong X \times k$ (trivialization)

としてとる。

生成元

$$\sigma_{U_i} \in \Gamma(U_i, p_{23*} L') = \Gamma(p_{23}^{-1} U_i, L')$$

の、$p_{23}^{-1}(U_i)$ 上の zero divisor を $\widetilde{D}_{U_i}$ とする。

σ_{U_i} と σ_{U_j} は $U_i \cap U_j$ 上、どこでも消えない正則函数倍しか違いがないので、

$\widetilde{D}_{U_i}$ たちは貼り合わせて、$X \times Y \times Z$ 上の divisor $\widetilde{D}$ を定める。

作り方から、

$$\widetilde{D}\big|_{X \times \{y_0\} \times \{z\}} = \widetilde{D}\big|_{X \times \{y\} \times \{z_0\}} = D$$

$$\widetilde{D} = \sum_{i=1}^{s} \{P_i\} \times Y \times Z$$ を示す。

そのために $\exists\, n_i \in (\mathbb{N})^s$, $\widetilde{D} = \sum_{i=1}^{s} n_i \{P_i\} \times Y \times Z$ を示す。

(これが分かれば、

$$\sum_{i=1}^{s} \{P_i\} = D = \widetilde{D}\big|_{X \times \{y_0\} \times \{z_0\}} = \sum_{i=1}^{s} n_i \{P_i\}$$

より、$n_i = 1$ となり、終了。)

そのために、$\forall P \notin \{P_1, \cdots, P_g\}$、

$$\mathcal{S} := (\mathrm{Supp}\,\widetilde{D}) \cap (P \times Y \times Z)$$

としたとき、$\mathcal{S} = \phi$ となることを示す。

$$\left(\begin{array}{l} \text{もし } \mathcal{S} = \phi \text{ ならば、} \\ \qquad (\mathrm{Supp}\,\widetilde{D}) \subset \left(\bigcup_i \{P_i\}\right) \times Y \times Z \\ \text{となり、どちらも } \mathrm{codim}_{X \times Y \times Z}(\cdot) = 1 \text{ で、} \\ X \times \{y_0\} \times \{z_0\} \text{ への制限を考えることで一致。} \end{array}\right)$$

$$p_3 : X \times Y \times Z \longrightarrow Z \quad ; \text{射影}$$

とする。

$z_0 \notin T$

$\mathcal{S}$ の p_3 による像 T は、Z 全体にはならないので、

Z のある codimension 1 の閉集合 T_i $(i = 1, \cdots, m)$

で、

$$\mathcal{S} \subset \bigcup_{i=1}^{m} \{P\} \times Y \times T_i$$

となるものが存在。もし $\mathcal{S} \neq \phi$ ならば、両辺ともに

$\mathrm{codim} = 1$ だから、$\mathcal{S} = \bigcup_{i=1}^{m} \{P\} \times Y \times T_i$

しかし、$\mathcal{S} \cap (\{P\} \times \{y_0\} \times Z) = \phi$ だったから矛盾。

$\therefore\ \mathcal{S} = \phi$. 以上のことから、Cube の定理が従う □

Cor 2

X : 任意の代数多様体.

Y : アーベル多様体

$f, g, h : X \to Y$; morphism.

このとき, ${}^\forall L \in \mathrm{Pic}(Y)$,

$$(f+g+h)^* L \cong (f+g)^* L \otimes (f+h)^* L \otimes (g+h)^* L \otimes f^* L^{-1} \otimes g^* L^{-1} \otimes h^* L^{-1}.$$

①

$$M := m^* L \otimes m_{12}^* L^{-1} \otimes m_{13}^* L^{-1} \otimes m_{23}^* L^{-1} \otimes p_1^* L \otimes p_2^* L \otimes p_3^* L.$$

を考える. (これは $Y \times Y \times Y$ 上の line bundle)

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f \times g \times h"] & Y \times Y \times Y \arrow[r, "p_1"] \arrow[r, "p_2"', shift right] \arrow[r, "p_3"', shift right=2] \arrow[d, "m_{12}"'] \arrow[d, "m_{23}", shift left] \arrow[d, "m_{13}", shift left=2] & Y \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

$X \xrightarrow{f \times g \times h} Y \times Y \times Y \xrightarrow{p_1} Y$

$x \mapsto (f(x), g(x), h(x)) \mapsto f(x)$

$p_1 \circ (f \times g \times h) = f.$

$X \xrightarrow{f \times g \times h} Y \times Y \times Y \xrightarrow{m_{12}} Y$

$x \mapsto (f(x), g(x), h(x)) \mapsto f(x) + g(x)$

$m_{12} \circ (f \times g \times h) = f + g$

など.

$$q : Y \times Y \longrightarrow Y \times Y \times Y \quad \text{とする.}$$
$$(y, y') \longmapsto (0, y, y')$$

$$\begin{cases} 0 : Y \times Y \longrightarrow Y & ; \ 0\text{-map} \\ q_i : Y \times Y \longrightarrow Y & ; \ \text{自然な射影,} \\ n : Y \times Y \longrightarrow Y & ; \ \text{和をとる射.} \end{cases}$$

このとき,

$$q^* M = n^* L \otimes q_1^* L^{-1} \otimes q_2^* L^{-1} \otimes n^* L^{-1} \otimes 0^* L \otimes q_1^* L \otimes q_2^* L.$$

$$= (n^* L \otimes n^* L^{-1}) \otimes (q_1^* L^{-1} \otimes q_1^* L) \otimes (q_2^* L^{-1} \otimes q_2^* L) \otimes 0^* L.$$

$$= \mathcal{O}_{Y \times Y}.$$

$\therefore$ $q^* M$ は 自明.

対称性から. M は $Y \times (0) \times Y$, $Y \times Y \times (0)$ でも自明.
よって. Cube の定理から. M は $Y \times Y \times Y$ 上で自明.
M を $f \times g \times h : Y \to Y \times Y \times Y$ で引き戻すことで,
$(f+g+h)^* = m^*$, $(f+g)^* = m_{12}^*$ などとなり.

$$(f+g+h)^* L = (f+g)^* L \otimes (f+h)^* L \otimes (g+h) L \otimes f^* L^{-1} \otimes g^* L^{-1} \otimes h^* L^{-1}$$

□

Cor 3

X : アーベル多様体, $n \in \mathbb{Z}$.

このとき,

$$\forall L \in \mathrm{Pic}(X), \quad n_X^* L \simeq L^{\left(\frac{n^2+n}{2}\right)} \otimes L^{\left(\frac{n^2-n}{2}\right)}$$

(∵) 帰納法を用いる.

$n=0$, $n=1$ のとき成立は明らか.

n, $n+1$ での成立を仮定して, $n+2$ のときを示す.

(Cor 2) で, $f=(n+1)_X$, $g=1_X$, $h=(-1)_X$ とすると

$$(n+2)_X^* L \otimes (n+1)_X^* L^{-2} \otimes n_X^* L \simeq 1_X^* L \otimes (-1_X)^* L.$$

$$\therefore \ (n+2)_X^* L \simeq (n+1)_X^* L^2 \otimes n_X^* L^{-1} \otimes L \otimes (-1_X)^* L.$$

仮定から,

$$\begin{cases} n_X^* L \simeq L^{\left(\frac{n^2+n}{2}\right)} \otimes (-1_X)^* L^{\left(\frac{n^2-n}{2}\right)} \\ (n+1)_X^* L \simeq L^{\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)} \otimes (-1_X)^* L^{\left(\frac{(n+1)\cdot n}{2}\right)} \end{cases}$$

これらを代入すれば, $n+2$ の場合が示せる. □

Cor 4 (Thm of Square)

$\forall L \in \mathrm{Pic}(X)$, $\forall x, y \in X$,

$$T_{x+y}^* L \otimes L \simeq T_x^* L \otimes T_y^* L.$$

よって.
$$\begin{array}{cccc} \Phi_L : & X & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(X) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & [T_x^* L \otimes L^{-1}] \end{array}$$
は群準同型.

(∵)

(Cor 2) で $X = Y$, $h = \mathrm{id}_X : X \to X$

$\forall a \in X$, $f(a) = x$, $\forall b \in X$, $g(b) = y$;定数写像

をあてはめる.

$T_x = \mathrm{id} + f = f + h$ に注意すれば,

(cf. $z \longmapsto z + x$)

$$(f+g+\mathrm{id})^* L \simeq (f+g)^* L \otimes (f+\mathrm{id})^* L \otimes (g+\mathrm{id})^* L$$
$$\otimes f^* L^{-1} \otimes g^* L^{-1} \otimes \mathrm{id}^* L^{-1}.$$

$$\therefore \quad T_{x+y}^* L \simeq T_x^* L \otimes T_y^* L \otimes L^{-1}$$
$$\otimes \big(\underbrace{(f+g)^* L \otimes f^* L^{-1} \otimes g^* L^{-1}}_{\leftarrow \text{trivial.}} \big)$$

$$\therefore \quad T_{x+y}^* L \otimes L \simeq T_x^* L \otimes T_y^* L. \qquad \square$$

$$\left(\begin{tikzcd} f^*L \arrow[r] \arrow[d] & L \ (\text{自明}) \arrow[d] \\ X \arrow[u, bend left, "f^*1"] \arrow[r, "f"] & \{x\} \arrow[u, bend right, "1"'] \end{tikzcd}\right)$$

Cor 4 を因子を用いて表すと.

$\forall D$: X 上の因子, $\forall x, y \in X$.

$$T_{x+y}^* D + D \equiv T_x^* D + T_y^* D$$ ($\equiv$ は線形同値)

$\phi_L : X \to \mathrm{Pic}(X)$ について.

(a) $\phi_{L_1 \otimes L_2} = \phi_{L_1} + \phi_{L_2}$

(b) $\phi_{T_x^* L} = \phi_L$.

(∵)

$$\phi_L(x) = [T_x^* L \otimes L^{-1}]$$ だった.

(a)

$$\begin{aligned}\phi_{L_1 \otimes L_2}(x) &= [T_x^*(L_1 \otimes L_2) \otimes (L_1 \otimes L_2)^{-1}] \\ &= [(T_x^* L_1) \otimes (T_x^* L_2) \otimes L_2^{-1} \otimes L_1^{-1}] \\ &= [T_x^* L_1 \otimes L_1^{-1}] \otimes [T_x^* L_2 \otimes L_2^{-1}] \\ &= \phi_{L_1}(x) + \phi_{L_2}(x).\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\phi_{T_x^* L}(x) &= [T_x^*(T_x^* L) \otimes (T_x^* L)^{-1}] \\ &= [T_x^*(T_x^* L) \otimes T_x^*(L^{-1})] \\ &= [T_x^*(T_x^* L \otimes L^{-1})] \\ &= [T_x^* L \otimes L^{-1}] = \phi_L(x).\end{aligned}$$

$\left(\begin{array}{l} f^*(L_1 \otimes L_2) \\ \Leftarrow f^* L_1 \otimes f^* L_2 \end{array}\right)$

∎

Def

$K(L) := \ker(\phi_L) = \{ x \in X \mid T_x^* L \cong L \}$

$K(L)$ は 単なる 抽象群 だったので、次は非自明.

Prop

$K(L)$ は X の Zariski 閉集合.

$\because$

$m^* L \otimes p_2^* L^{-1}$ に See saw thm (Cor 6)

を用いると. ($\leftarrow$ $X \times X$ 上の line bundle)

$X \supset X_1 := \{ x \in X \mid (m^* L \otimes p_2^* L^{-1})|_{\{x\} \times X}$ は自明束$\}$

は X の Zariski 閉集合.

ここで、

$(m^* L \otimes p_2^* L^{-1})|_{\{x\} \times X} \cong T_x^* L \otimes L^{-1}$.

$\therefore \quad X_1 = K(L)$

$\square$

Application 1

D : アーベル多様体 X 上の有効因子.

$L := L(D)$: D に付随する line bundle.

このとき、以下の (i) ~ (iv) は互いに同値.

(i) $H = \{ x \in X \mid T_x^* D = D \}$: X の部分群 は有限集合.

(ii) $K(L)$ は有限集合.

(iii) $|2D| = \{ D_0 \mid D_0$ は $D_0 \sim 2D$ なる有効因子$\}$ は base point free で 有限射

$$\Phi_{|2D|} : X \longrightarrow \mathbb{P}^N$$

を誘導する.

(iv) L は X 上の ample line bundle.

∵ (iii) ⇒ (iv) [Hartsforne Ch. III ex 5.7] より.

$\Phi_{|2D|} : X \to \mathbb{P}^N$ で

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)|_{\Phi(X)}$ が ample

$$\overset{\text{∵}}{\Longrightarrow} \quad \Phi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)|_{\Phi(X)}) = L(2D) \text{ が ample.}$$

(iv) ⇒ (ii)

[背理法] $K(L)$ が有限でない、と仮定。

Y : $K(L)$ の 0 を含む連結成分 としてとる。

このとき、$\dim_k Y > 0$ で、Y は アーベル多様体。

仮定より、L は X 上の ample line bundle なので、

$L_Y := L|_Y$ は Y 上の ample line bundle.

$\forall y \in Y \ (\subset K(L))$, $T_y^* L_Y \cong L_Y$ だから、

(Seesaw thm) を用いれば、$Y \times Y$ 上の line bundle

$$m^* L_Y \otimes p_1^* L_Y^{-1} \otimes p_2^* L_Y^{-1}$$

は trivial.

∵

$$\begin{tikzcd} & Y \times Y \arrow[r, "m"] \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & Y \\ Y & & Y \end{tikzcd}$$

$(y_1, y_2) \in Y \times Y$, $y_1 + y_2 \in Y$, $y_1 \in Y$, $y_2 \in Y$

$$\left(m^* L_Y \otimes p_1^* L_Y^{-1} \otimes p_2^* L_Y^{-1}\right)\Big|_{Y \times \{y\}} = T_y^* L_Y \otimes L_Y^{-1} \cong \mathcal{O}_Y. \quad (\forall y \in Y)$$

$\Rightarrow$ $m^* L_Y \otimes p_1^* L_Y^{-1} \otimes p_2^* L_Y^{-1}$ は $Y \times Y$ 全体で trivial.

$Y \times Y$ 上の $m^* L_Y \otimes p_1^*(L_Y^{-1}) \otimes p_2^*(L_Y^{-1})$ を

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & Y \times Y \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ y & \longmapsto & (y, -y) \end{array}$$

で引き戻すことで、

$L_Y \otimes (-1_Y)^* L_Y$ も Y 上 trivial.

今、L_Y は Y 上 ample だったから、
$L_Y \otimes (-1_Y)^* L_Y$ も Y 上 ample.

しかし、自明束が ample になるのは $\dim Y = 0$ の時のみ。矛盾。
$\therefore$ (iv) $\Rightarrow$ (ii).

<u>(ii) $\Rightarrow$ (i)</u> $K(L) \supset H$ より明らか。

<u>(i) $\Rightarrow$ (iii)</u>

((i) : $H = \{x \in X \mid T_x^* D = D\}$ は有限集合.)

(Cor 4) より、$T_x^* D + T_{-x}^* D \in |2D|$.

$$\left(\because \quad 2D = T^*_{(x+(-x))} D + D \underset{\text{(Cor 4)}}{\equiv} T^*_x D + T^*_{-x} D \right)$$

$^\forall u \in X, \quad ^\exists x \in X$

s.t. $\quad u \pm x \notin \mathrm{Supp}(D).$

$(\because \quad \mathrm{codim}_X (\mathrm{Supp}(D)) = 1 \quad)$

$\therefore \quad u \notin \mathrm{Supp}(T^*_x D + T^*_{-x} D).$

$\therefore \quad |2D|$ は base point free. なので、

$\Phi := \Phi_{|2D|} : X \longrightarrow \mathbb{P}^N$ を誘導.

もし. Φ が有限射でなければ、

$^\exists C \subset X$ s.t. 既約曲線

s.t. $\quad \Phi(C) = \{p\} \quad (\subset \mathbb{P}^N)$

つまり. $\underbrace{^\forall E \in |2D|}_{E \equiv 2D}$, $\begin{cases} p \in \Phi(\mathrm{Supp}(E)) \Rightarrow C \subset \mathrm{Supp}(E) \\ p \notin \Phi(\mathrm{Supp}(E)) \Rightarrow C \cap \mathrm{Supp}(E) = \phi \end{cases}$

$\therefore \quad ^\exists x \in X, \quad C \cap (T^*_x(D) + T^*_{-x}(D)) = \phi.$

$E = (S_0 = 0)$ $\quad$ $\overset{x \in C}{S_0(x)} \begin{cases} = 0 & C \subset \mathrm{Supp}(E) \\ \neq 0 & ; C \cap \mathrm{Supp}(E) \end{cases}$

$$\Phi(x) = [\underline{S_0(x)} : \cdots : S_N(x)] \in \Phi(X) \subset \mathbb{P}^N$$

Lem

C : X 上の Curve.

E : X 上の 既約因子.

s.t.

$C \cap E = \phi$.

このとき, ${}^{\forall} x_1, x_2 \in C$, $T^*_{x_1 - x_2} E \equiv E$.

Lem が示されたとする.

E を 先程のような $T^*_x D + T^*_{-x} D$ の 既約成分とする.

すると, $C \cap E = \phi$ なので, Lem より,

${}^{\forall} x_1, x_2 \in C$, $T^*_{x_1 - x_2} E \equiv E$.

これは 仮定 (i) に 矛盾. ゆえに (iii) が 示される.

[Lem の 証明]

L を E に 付随する line bdl. とする.

このとき, $C \cap E = \phi$ より, $L|_C = \mathcal{O}_C$.

ゆえに,

$${}^{\forall} x \in X, \quad \deg(T^*_x L|_C) = 0.$$

($\because$ $T^*_x L$ と L は 同じ degree)

もし $T_x(C) \cap E$ が有限集合なら $\deg(T_x^* L|_C) > 0$ なので、$T_x(C) \cap E$ は有限集合にならない。

$x_1, x_2 \in C$, $y \in E$ とすると、

$$y \in T_{y-x_2}(C) \cap E \qquad (\Rightarrow T_{y-x_2}(C) \cap E \neq \phi)$$

$$\therefore \quad T_{y-x_2}(C) \subset E.$$

$$\therefore \quad \underset{\substack{\shortparallel \\ y + (x_1 - x_2)}}{y - x_2 + x_1} \in E$$

となる。$T^*_{x_1-x_2}(E) \subset E$.

$T^*_{x_1-x_2}(E)$, E はともに codimension 1 で既約.

$$\therefore \quad T^*_{x_1-x_2}(E) = E$$

$\square$

Cor

アーベル多様体 X は射影的

∵

U : X の open affine subset.

このとき、X が完備代数多様体であることから、

$D = X \setminus U$ は有効因子になる。

($P \in X \setminus U$ で極を持ち、U で正則な有理函数がとれる)

必要なら平行移動することで、$0 \in U$ としてよい。

$$H := \{ x \in X \mid T_x^* D = D \}$$

とおくと、これは閉集合 ∴ 完備

$T_x^* D = D$ なる $x \in X$ について、$T_x^* U = U$.

($x \in H$)

$0 \in U$ より $x \in U$.　　∴ $H \subset U$.

($0 \in U = T_x^* U \ni 0 + x = x$)

H は完備、U は affine なので H は有限集合.

∴ (Application 1) より、D は ample

∎