

§5. Cohomology and base change

Thm 1 (Grothendieck)

X, Y : 局所 Noether スキーム.

$f : X \rightarrow Y$: 固有射

$\mathcal{F}$: X 上の連接層.

このとき.

$\mathcal{H}^p_{f,*} \mathcal{F}$, $R^p f_* \mathcal{F}$ は Y 上の連接層.

[仮定あり]

Def

分離性を仮定しない
↓

$f : X \rightarrow Y$: (前) スキーム 内の射

$\mathcal{F}$: X 上の準連接層.

点 $x \in X$ において, $\mathcal{F}$ は Y 上平坦 であるとは.

$\mathcal{F}_x$ は平坦 $\mathcal{O}_{Y,y}$ -加群 であるという.

$$\left(\begin{array}{l} y = f(x) \text{ として, } f^* : \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x} \text{ によって,} \\ \mathcal{F}_x \text{ は } \mathcal{O}_{Y,y}\text{-加群 と 見做している} \end{array} \right)$$

これは. $U \subset X, V \subset Y$ $\hookrightarrow$ $\mathbb{A}^n$ の open affine
 f.t. $f(U) \subset V$ $\hookrightarrow$ $\mathbb{A}^n$ である.

$\mathcal{F}(U)$ $\hookrightarrow$ $\mathcal{O}_Y(V)$ - 加群 $\hookrightarrow$ $\mathbb{A}^n$ である. $\hookrightarrow$ 同値.
 平坦

Main Thm 2

$f: X \rightarrow Y$: Noether スキームの固有射.

$Y = \text{Spec}(A)$.

$\mathcal{F}$: X 上の 連接層. $\hookrightarrow$ Y 上 平坦 なもの

これは.

K^i : 有限生成 な 射影的 A -加群. $\hookrightarrow$ $\mathbb{A}^n$ である

複体 $K^\bullet$: $0 \rightarrow K^0 \rightarrow K^1 \rightarrow \dots \rightarrow K^n \rightarrow 0$

$\hookrightarrow$ 存在して.

A -加群の圏 $\text{Mod}(A)$ $\hookrightarrow$ $\text{Mod}(A)$ への 函手 の 同型.

$$H^p(X \times_Y \text{Spec}(B), \mathcal{F} \otimes_A B) \cong H^p(\underbrace{K^\bullet}_{\sim} \otimes_A B) \quad (\forall p \geq 0)$$

$\hookrightarrow$ 得られる.

[Proof]

$\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$: open affine に對し X の有限開被覆.

このとき, Čech 複体

$$C^\bullet = C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \bigoplus C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

は, 平坦 A 加群 $\mathcal{F}$ の對し有限複体 であり,

$$H^p(C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \cong H^p(X, \mathcal{F})$$

Rem

各 $p \geq 0$ に對し,

$$C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0 < \dots < i_p} \mathcal{F}(U_{i_0 \dots i_p})$$

$$U_{i_0 \dots i_p} = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}$$

$$\begin{array}{ccc} d: C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \alpha & \longmapsto & d\alpha \end{array}$$

$$\alpha_{i_0 \dots i_p} \in \mathcal{F}(U_{i_0 \dots i_p}).$$

$$(d\alpha)_{i_0 \dots i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \alpha_{i_0 \dots \widehat{i_k} \dots i_{p+1}} \Big|_{U_{i_0 \dots i_{p+1}}}$$



さらに, 任意の A -加群 B に対し,

$\{U_i \times_{\text{Spec}(B)}\}$ は $X \times_{\text{Spec}(B)}$ の affine 被覆.

$C^p(U, \mathcal{F}) \otimes_A B$ は, $\mathcal{F} \otimes_A B$ の, $\{U_i \times_{\text{Spec}(B)}\}$ に関する Čech p -cocycle.

$$\left(\begin{array}{l} \Gamma(U_{i_0, \dots, i_p}, \mathcal{F} \otimes_A B) = \Gamma(U_{i_0, \dots, i_p}, \mathcal{F}) \otimes_A B \\ (*) \quad C^*(U, \mathcal{F} \otimes_A B) = C^* \otimes_A B \end{array} \right)$$

$\therefore \forall B \in \text{Mod}(A).$

$$H^p(X \times_{\text{Spec}(B)}, \mathcal{F} \otimes_A B) = H^p(C^* \otimes_A B)$$

$\uparrow$
 $\exists K^* : = H^p(K^* \otimes_A B) \text{ 否?}$

Lemma 1

A : 任意の Noether 環.

C^* : A -加群の複体.

s.t. $H^i(C^*)$ は有限生成 A -加群 かつ

$$C^p \neq (0) \Rightarrow 0 \leq p \leq n.$$

このとき,

$\exists K^*$: 有限生成 A -加群の複体.

s.t. $K^p \neq (0) \Rightarrow 0 \leq p \leq n.$ かつ

$1 \leq p \leq n \Rightarrow K^p$ は自由.

Isk. $\exists \phi: K^\bullet \rightarrow C^\bullet$

s.t.

ϕ は ψ , $H^i(K^\bullet) \xrightarrow{\sim} H^i(C^\bullet)$ に誘導.

また, ψ p, C^p は平坦 A 加群 ψ S.

K^0 は平坦 A 加群.

Rem

Thm 1 4). $R^p f_* \mathcal{F}$ は Y 上 連続的 $\mathcal{O}_Y$.

$Y = \text{Spec}(A)$ 4). $R^p f_* \mathcal{F} \cong (H^p(X, \mathcal{F}))^\sim$

よって. $H^p(C^\bullet)$ は 有限生成 A -加群 となる.

[Proof] m について, 降下帰納法.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \textcircled{K^m} & \xrightarrow{\partial^m} & K^{m+1} & \rightarrow & K^{m+2} & \rightarrow & \dots \\
 \downarrow \phi_m & & \downarrow \phi_{m+1} & \circlearrowleft & \downarrow \phi_{m+2} & \circlearrowleft & \\
 \dots \rightarrow C^{m-1} \rightarrow C^m & \xrightarrow{\partial^m} & C^{m+1} & \rightarrow & C^{m+2} & \rightarrow & \dots
 \end{array}$$

($p > n$ については $K^p = 0$ とする)

$p \geq m+1$ に対し、次の条件を満たす $(K^p, \phi_p, \partial^p)$ が構成できる:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{(i)} & \partial^p \phi_p = \phi_{p+1} \partial^p \quad (p \geq m+1) \\ \text{(ii)} & \partial^{p+1} \circ \partial^p = 0 \quad (p \geq m+1) \\ \text{(iii)} & q \geq m+2 \text{ に対し, } \phi_p: K^p \rightarrow C^p \text{ は,} \\ & H^q(K^\bullet) \xrightarrow{\sim} H^q(C^\bullet) \\ & \text{を導く.} \\ & q = m+1 \text{ に対し } \phi_{m+1}: K^{m+1} \rightarrow C^{m+1} \text{ は} \\ & \ker(\partial^{m+1}) \rightarrow H^{m+1}(C^\bullet) \\ & \text{を導く.} \\ \text{(iv)} & K^p \text{ は 有限生成 自由 } A\text{-加群.} \quad (p \geq m+1). \end{array} \right.$$

この仮定の下で、同様の条件を満たす $(K^m, \phi_m, \partial^m)$ を構成する。

$m \geq 0$ のとき

$$B^{m+1} := \ker(\ker(\partial^{m+1}) \rightarrow H^{m+1}(C^\bullet))$$

$$\left(\ker(\partial^{m+1}) / B^{m+1} \cong H^{m+1}(C^\bullet) \right)$$

$$(0 \rightarrow B^{m+1} \rightarrow \ker(\partial^{m+1}) \rightarrow H^{m+1}(C^\bullet) \rightarrow 0)$$

B^{m+1} は A 上有限生成なので.

$$\left[\begin{array}{l} \exists K'^m : \text{有限生成自由 } A\text{-加群} \\ \text{s.t.} \quad K'^m \xrightarrow{\partial'} B^{m+1} \end{array} \right.$$

さらに, $H^m(C^\bullet)$ も有限生成 A -加群なので.

$$\left[\begin{array}{l} \exists K''^m : \text{有限生成自由 } A\text{-加群} \\ \text{s.t.} \quad K''^m \xrightarrow{\lambda} H^m(C^\bullet) = Z^m(C^\bullet) / B^m(C^\bullet) \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{ccccc} & & \phi_m'' & & \\ & & \curvearrowright & & \\ K''^m & \xrightarrow{\mu} & Z^m(C^\bullet) & \xhookrightarrow{i_m} & C^m \\ & \searrow \lambda & \downarrow & & \\ & & H^m(C^\bullet) & & \end{array}$$

λ の持ち上げ μ と $\phi_m'' := i_m \circ \mu : K''^m \rightarrow C^m$ を定め

$$\phi_m'' := i_m \circ \mu : K''^m \rightarrow C^m$$

この状況の下.

$$K^m := K'^m \oplus K''^m$$

$$\partial^m : K^m \rightarrow K^{m+1}$$

$$\text{s.t.} \quad \partial^m|_{K'^m} = \partial', \quad \partial^m|_{K''^m} = 0$$

$$\begin{array}{ccc} K^m & \xrightarrow{\partial^m} & K^{m+1} \\ \parallel & & \cup \\ K'^m & \xrightarrow{\partial'} & \ker(\partial^{m+1}) \\ \oplus & \searrow \partial^m & \cup \\ K''^m & \xrightarrow{\phi_m''} & B^{m+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \xrightarrow{\quad} & 0 \end{array}$$

これは定数.

$$\phi_{m+1}(\partial'(K'^m)) \subset \partial(C^m) \quad (= \text{Im}(C^{m+1} \rightarrow C^m))$$

4/.

$$\exists \phi'_m : K' \rightarrow C^m$$

s.t.

$$\partial \circ \phi'_m = \phi_{m+1} \circ \partial'$$

$$\begin{array}{ccc} K'^m & \xrightarrow{\partial'} & B^{m+1} \subset K^{m+1} \\ \downarrow \phi'_m & \circlearrowleft & \downarrow \phi_{m+1} \\ C^m & \xrightarrow{\partial} & C^{m+1} \end{array}$$

$$\text{ゆえに, } \phi_m : K^m \rightarrow C^m \quad \exists.$$

$$\phi_m|_{K'^m} = \phi'_m, \quad \phi_m|_{K^m} = \phi''_m$$

これ構成できる。構成の仕方から、 ϕ_p, ∂^p に対しては、

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{(i)} & \partial^p \phi_p = \phi_{p+1} \partial^p \quad (p \geq m) \\ \text{(ii)} & \partial^{p+1} \circ \partial^p = 0 \quad (p \geq m) \\ \text{(iii)} & \begin{array}{ll} q \geq m+1 & \text{で} \quad H^q(K^\bullet) \simeq H^q(C^\bullet) \\ q = m & \text{で} \quad \text{Ker}(\partial^m) \rightarrow H^m(C^\bullet) \end{array} \\ \text{(iv)} & K^p \text{ は有限生成 } A \text{ の群} \quad (p \geq m) \end{array} \right.$$

$m = -1$ のとき

(i) ~ (iii) を用いて $(K^p, \phi_p, \partial^p)$ が $p \geq 0$ で構成できたこと。

このとき、 K^0 を $K^0 / (\ker \partial^0 \cap \ker \phi_0)$ に置き換え。

$$\begin{cases} \phi_0 : K^0 \rightarrow C^0 \\ \partial^0 : K^0 \rightarrow K^1 \end{cases}$$

を誘導した写像とする。

$p < 0$ として $K^p = 0$ とすれば、複体

$$0 \rightarrow K^0 \rightarrow K^1 \rightarrow \dots \rightarrow K^n \rightarrow 0$$

と、 $\phi : K^\bullet \rightarrow C^\bullet$ st. $H^p(K^\bullet) \cong H^p(C^\bullet)$ を得る。

残った問題

$$\begin{array}{|l} \cup_p, C^p : \text{平坦 } A \text{ 加群} \\ \Rightarrow K^0 \text{ は 平坦 } A \text{ 加群.} \end{array}$$

②

写像錐 (mapping cone) を考える。

78).

$$L^p := K^p \oplus C^{p-1} \quad (p \in \mathbb{Z})$$

$$\partial : L^p \rightarrow L^{p+1}$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \partial(x, 0) = (\partial(x), \phi(x)) \\ \partial(0, y) = (0, -\partial(y)) \end{cases}$$

$$C' := C[-1] \quad \text{と定める.}$$

$$\text{i.e.,} \quad (C')^p = C^{p-1}$$

よって,

$$0 \rightarrow C' \rightarrow L \rightarrow K \rightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

よ

$$H^p(C') \hookrightarrow H^p(K)$$

$$\hookrightarrow H^{p+1}(C') \rightarrow H^{p+1}(L) \rightarrow H^{p+1}(K)$$

$$\hookrightarrow H^{p+2}(C') \rightarrow \dots \quad (\text{exact})$$

$$H^{p+1}(C')$$

$$\text{命.} \quad H^i(K) \cong H^i(C) \cong H^{i+1}(C') \quad \text{ただし, } i \in \mathbb{Z}.$$

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \quad H^p(L) = 0.$$

$$\therefore 0 \rightarrow K^0 = L^0 \rightarrow L^1 \rightarrow L^2 \rightarrow \dots \rightarrow L^{n+1} \rightarrow 0$$

は exact sequence.

しかも $\forall i \geq 1, L^i$ は 平坦 A 加群.

($\because C^p, K^p$ ともに 平坦 A 加群)

$\therefore K^0$ も 平坦 A 加群

□

Lem 2

$C^\bullet, K^\bullet$: 任意の, 平坦 A 加群 による 有限複体.

$\exists \phi : K^\bullet \rightarrow C^\bullet$; 複体内の準同型 21.

$\forall p, H^p(K^\bullet) \xrightarrow{\sim} H^p(C^\bullet)$ を 誘導するもの.

このとき, すべての A 加群 B について,

$$H^p(K \otimes_A B) \xrightarrow{\sim} H^p(C \otimes_A B)$$

② (Lem 1) と同様に, 写像柱 $L^\bullet$ をつくる.

$$(0 \rightarrow C' \rightarrow L \rightarrow K \rightarrow 0)$$

$L^\bullet$ は平坦 A 加群 に対する 完全な 有限複体.

こゝで, $Z^p := \ker(L^p \xrightarrow{d^p} L^{p+1})$ は平坦.

$$(\because 0 \rightarrow Z^p \rightarrow L^p \rightarrow L^{p+1} \rightarrow \cdots \rightarrow L^{n+1} \rightarrow 0 \quad (\text{exact}))$$

平坦 A 加群.

よゝ, $0 \rightarrow Z^p \rightarrow L^p \rightarrow Z^{p+1} \rightarrow 0$ は.

平坦 A 加群 に対する short exact sequence. よゝ.

$$0 \rightarrow Z^p \otimes_A B \rightarrow L^p \otimes_A B \rightarrow Z^{p+1} \otimes_A B \rightarrow 0$$

も 完全, ($\because Z^{p+1}$ も 平坦, Snake Lemma より)

これより, $L^\bullet \otimes_A B$ も 完全, ($\because$ 分解を参考に)

- 故, $L^\bullet \otimes_A B$ は.

$$K^\bullet \otimes_A B \rightarrow C^\bullet \otimes_A B$$

の 写像 鎖. こゝで,

$$0 \rightarrow C'^\bullet \otimes_A B \rightarrow L^\bullet \otimes_A B \rightarrow K^\bullet \otimes_A B \rightarrow 0$$

は 複体の 完全列.

$$\begin{aligned} \therefore H^p(K^\bullet \otimes_A B) &\cong H^{p+1}(C'^\bullet \otimes_A B) \\ &\cong H^p(C^\bullet \otimes_A B) \end{aligned}$$

$$X_n := X \times_{\mathbb{A}^1} \mathrm{Spec}(k(n))$$

$$\mathcal{F}_n := \mathcal{F} \otimes_{\mathbb{A}^1} k(n)$$

Cor 2

$f: X \rightarrow Y$: Noether スキーム間の 固有射.

$\mathcal{F}$: X 上の 連接層 で. Y 上 平坦 なもの.

いま.

(a) 各 $r \geq 0$ に対し.

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_r & \longrightarrow & \dim_{k(n)} H^p(X_n, \mathcal{F}_n) \end{array}$$

は Y 上 上半連続系.

$$(b) \quad \begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F} & \longrightarrow & \chi(\mathcal{F}_n) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \dim_{k(n)} H^p(X_n, \mathcal{F}_n) \end{array}$$

は, 局所定数函数

②

問題は 局所的 なので, $Y = \mathrm{Spec}(A)$.

(A : Noether 環) におきかえてよい.

(Thm 2) 4)

$$\exists K^\bullet : 0 \rightarrow K^0 \rightarrow K^1 \rightarrow \dots \rightarrow K^n \rightarrow 0$$

(K^i : 有限生成な射影的 A -加群)

s.t.

$$H^p(X_\eta, \overline{F}_\eta) \cong H^p(K^\bullet \otimes_A k(\eta)) \quad (p \geq 0)$$

ここで、 γ を十分小さくとることで (i.e., 局所化する) ことで

$K^\bullet$ は自由加群の複体 としてよい。

$$d^p : K^p \rightarrow K^{p+1} \quad ; K \rightarrow \text{coboundary}$$

とる。

$$\dim_{k(\eta)} H^p(X_\eta, \overline{F}_\eta)$$

$$= \dim_{k(\eta)} (\ker(d^p \otimes_A k(\eta))) - \dim_{k(\eta)} (\text{Im}(d^{p-1} \otimes_A k(\eta)))$$

$$= \dim_{k(\eta)} (K^p \otimes_A k(\eta)) - \dim_{k(\eta)} (\text{Im}(d^p \otimes_A k(\eta))) \\ - \dim_{k(\eta)} (\text{Im}(d^{p-1} \otimes_A k(\eta))) \quad (*)$$

$K^\bullet$: 自由加群 4) $\dim_{k(\eta)} (K^p \otimes_A k(\eta))$ は γ に一定。

$$\therefore \chi(\overline{F}_\eta) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \dim_{k(\eta)} (K^p \otimes_A k(\eta)) \text{ は } \gamma \text{ に一定。}$$

i) (b) 成立。

Claim

$$\forall r \geq 0,$$

$$\rho_r(\gamma) = \dim_{k(\gamma)} (\operatorname{Im} (d^p \otimes k(\gamma)))$$

は γ 上 下半連続.

($\Leftarrow$)

$$\forall r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad d_r^p : \wedge^r K^p \rightarrow \wedge^r K^{p+1}$$

は, $d^p : K^p \rightarrow K^{p+1}$ から誘導される写像で,

$$\{\gamma \in Y \mid \rho_r(\gamma) < r\} = \{\gamma \in Y \mid d_r^p \otimes k(\gamma) = 0\}$$

$\uparrow$
 $\wedge^r (r-1 \text{ 次元以下}) = 0$

d_r^p は, 有限生成自由加群 の 間の 準同型 なので,

行列 $A(\gamma) = \{a_{ij}(\gamma)\}$ を用いて表すことができる.

$$(\text{右辺}) = \bigcap \{\gamma \in Y \mid a_{ij}(\gamma) = 0\} \quad \therefore \text{e.g. 閉集合.}$$

つまり, $\rho_r(\gamma)$ は 下半連続

以上 から, $\dim_{k(\gamma)} H^p(X_\gamma, \mathcal{F}_\gamma)$ は 上半連続

□

Cor 2

$f: X \rightarrow Y$: Noether 2重- G 向の固有射.

$\mathcal{F}$: Y 上 平坦 好 X 上の 連接層.

Y 上の 被約 好 連結 と仮定.

このとき. 好 Y の P について. 次は同値:

$$(i) \quad \begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \eta & \longmapsto & \dim_{k(\eta)} H^P(X_\eta, \mathcal{F}_\eta) \end{array}$$

は 定数函数

(ii) $R^P f_* \mathcal{F}$ は. Y 上の 局所自由層 $\mathcal{E}$ であり
 $\eta \in Y$,

$$\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Y} k(\eta) \xrightarrow{\sim} H^P(X_\eta, \mathcal{F}_\eta)$$

すなわち. (i) $\sim$ (ii) 成り立つとき.

$$\eta \in Y, \quad R^{P-1} f_* (\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} k(\eta) \xrightarrow{\sim} H^{P-1}(X_\eta, \mathcal{F}_\eta)$$

[Proof]

Y : affine scheme.

K^* : Prop $\subset \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$. とてよい.

(ii) のとき. $\mathcal{E}$ は 局所自由層 である.

$$\gamma \mapsto \dim H^p(X_\gamma, \mathcal{F}_\gamma) = \dim_{k(\gamma)} (\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_\gamma} k(\gamma))$$

は 定数 (i)

(i) $\Rightarrow$ (ii) を示す. このために, Lem を 2つ 準備する.

Lem 1

Y : 被約スキーム.

$\mathcal{F}$: Y 上の 連接層 である.

$$\forall \gamma \in Y, \quad \dim_{k(\gamma)} (\mathcal{F}_\gamma \otimes_{\mathcal{O}_\gamma} k(\gamma)) = r$$

となるもの. とある. このとき.

$\mathcal{F}$ は Y 上の 階数 r の 局所自由層.

$$\textcircled{2} \quad \forall y \in Y, \quad \sigma_1, \dots, \sigma_r \in F_2 \otimes_{\mathcal{O}_Y} k(y)$$

か、 $F_2 \otimes k(y)$ の生成系に持ち上げられる。

(中山の補題) より、 $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ は、 $\mathcal{M}$ の近傍で section に延長できるので。

$\mathcal{M}$ の近傍 V 上での準同型。

$$\sigma: \mathcal{O}_Y|_V \rightarrow \mathcal{F}|_V$$

を得る。

σ は、 $\mathcal{M}$ の stalk 上では全射 ($\sigma \otimes k(y) = 0$) かつ、
 $\text{Coker}(\sigma \otimes k(y)) = 0$ 。

よって、再び (中山の補題) により、

$\mathcal{M}$ の近傍 U で、 $\text{Coker}(\sigma) = 0$ 。

V を取りかえて、 σ は全射としてよい。単射を示す。
 仮定より、 $\forall y' \in V$,

$$\sigma \otimes k(y') : k(y')^r \rightarrow F_2 \otimes_{\mathcal{O}_{y'}} k(y')$$

は同型。

$$D \subset \mathcal{O}_Y^r|_U = \mathcal{O}_Y|_U \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_Y|_U$$

$$\text{よって, } D := \ker(\sigma) \quad \text{と定めて}$$

$$\forall p, \forall p' \in V \quad \text{つまり}$$

$$D_{p'} \subset m_{p'} \mathcal{O}_{p'}^r \quad (= m_{p'} \oplus \dots \oplus m_{p'})$$

Y は 複素多様体.

特に, 各点 $p' \in V$ 上.

$$N_{p'} = (N_{1p'}, N_{2p'}, \dots, N_{rp'}) = 0 \Rightarrow D(V) \ni N = 0$$

$$(\pi(U) \rightarrow \prod_{x \in U} \mathbb{F}_x \text{ は単射})$$

$$\therefore D = 0 \quad \text{よって } \sigma \text{ は 同型}$$

□

Lem 2

Y : 被約 $\mathbb{A}^n$ Noether 的 $\mathbb{A}^1$ Affine scheme.

$$\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{D}$$

; 局所自由 $\mathbb{A}^1$ 連接 $\mathcal{O}_Y$ 的群 $\mathcal{O}_Y$ の射.

もし, $\dim_{k(s)} (\text{Im}(\phi \otimes k(s)))$ $\mathbb{A}^1$ 局所定数函数 $\mathbb{A}^1$ 上.

$\exists$ 分解.

$$\begin{cases} \mathcal{F} \cong \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \\ \mathcal{D} \cong \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \end{cases}$$

s.t.

$$\begin{cases} \phi|_{\mathcal{F}_1} = (0), \text{Im}(\phi) \subset \mathcal{D}_1 \\ \phi : \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_1 \end{cases}$$

i.e.,
$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & \text{isom.} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(?)

(Lem 1) より $\phi(\mathcal{F})$ $\mathbb{A}^1$ 局所自由層 なる.

$\mathcal{D}/\phi(\mathcal{F})$ $\mathbb{A}^1$ 局所自由層.

$\hookrightarrow \dim_{k(s)} ((\mathcal{D}/\phi(\mathcal{F}))_s \otimes k(s)) = \text{一定. 示す.}$

$$Y = \text{Spec}(A), \quad M = \Gamma(Y, \mathcal{F}), \quad N = \Gamma(Y, \mathcal{D})$$

とくに,

このとき, $N/\phi(M)$ は 射影的 A -加群.

$$\text{7.4).} \quad N \cong \phi(M) \oplus N_2, \quad N_2 \cong N/\phi(M)$$

となる.

$$\text{これは,} \quad D \cong D_1 \oplus D_2, \quad D_1 \cong \text{Im}(\phi)$$

となる. 以下に,

さらに, $\phi(M)$ を 射影的 A -加群 となるので,

$$M \cong \text{Ker}(\phi) \oplus M_2, \quad M_2 \cong \phi(M)$$

$$\text{7.4).} \quad \mathcal{F} \cong \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \quad \text{であって.}$$

$$\phi(\mathcal{F}_1) = (0), \quad \phi: \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\sim} D_1$$

□

[Proof of Cor 2]

(i): $\gamma \mapsto \dim_{k(\gamma)} H^p(X_\gamma, F_\gamma) \quad p \text{ 定数函数}$

を仮定す. $K^\bullet$ を (Main Thm) と同じものとする.

i.e.,

$$K^\bullet : 0 \rightarrow K^1 \rightarrow K^2 \rightarrow \dots \rightarrow K^n \rightarrow 0$$

s.t. K^i は 有限生成 R 射影 A 加群.

$$H^p(K^\bullet) \cong H^p(X, F)$$

(Cor 1) の証明より.

$$\dim(\text{Im}(d^i \otimes k(\gamma))) \quad i = p-1, p$$

は 局所定数函数 $((i): \dim_{k(\gamma)} H^p(X_\gamma, F_\gamma) \text{ は 定数函数})$

$$(\text{lem 2}) \quad \left\{ \begin{array}{l} d_p : K^p \rightarrow K^{p+1} \\ d_{p-1} : K^{p-1} \rightarrow \ker(d_p) \end{array} \right.$$

に用いて,

$$\begin{array}{ccccc} \overset{\text{ker}(d_{p-1})}{\overset{''}{Z_{p-1} \oplus K_{p-1}'}} & & \overset{(\ker(d_p))}{\overset{''}{B_p \oplus H_p \oplus K_p'}} & & \overset{\text{Im}(d_p)}{\overset{''}{B_{p+1} \oplus K_{p+1}'}} \\ \overset{''}{\parallel} & & \overset{''}{\parallel} & & \overset{''}{\parallel} \\ K_{p-1} & \xrightarrow{d_{p-1}} & K_p & \xrightarrow{d_p} & K_{p+1} \end{array}$$

$\overset{K_{p+1}/\text{Im } d_p}{\overset{''}{Z''}}$

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{ker}(d_{p-1}) & & \boxed{\text{ker}(d_p) \oplus K'_p} & & \text{Im}(d_p) \\
 \text{"} & & (\text{ker}(d_p)) & & \text{"} \\
 Z_{p-1} \oplus K'_{p-1} & & B_p \oplus H_p \oplus K'_p & & B_{p+1} \oplus K'_{p+1} \\
 \text{"} & & \text{"} & & \text{"} \\
 & & \text{Im } d_{p-1} & & \text{Im } d_p \\
 & & \text{"} & & \text{"} \\
 & & \text{ker } d_p & & \text{"} \\
 & & \text{Im } d_{p-1} & & \\
 K_{p-1} & \xrightarrow{d_{p-1}} & K_p & \xrightarrow{d_p} & K_{p+1}
 \end{array}$$

$$\begin{cases}
 Z_{p-1} = \text{ker}(d_{p-1}) \\
 d_{p-1} : K'_{p-1} \xrightarrow{\sim} B_p
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 B_p \oplus H_p = \text{ker}(d_p) \\
 d_p : K'_p \xrightarrow{\sim} B_{p+1}
 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} &\simeq R^p f_* \mathcal{F} \\
 &\simeq (H^p(X, \mathcal{F}))^\vee
 \end{aligned}$$

$$\therefore H^p(K^\bullet \otimes_A B) \stackrel{\textcircled{1}}{\simeq} H_p \otimes_A B \stackrel{\textcircled{2}}{\cong} H^p(K^\bullet) \otimes_A B$$

$\uparrow$
 $k(n)$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1}: & \quad K^{p-1} \longrightarrow \text{ker}(d^p) \longrightarrow H_p \longrightarrow 0 \\
 & \quad K^{p-1} \otimes_A B \xrightarrow{d^{p-1} \otimes B} \text{ker}(d^p) \otimes_A B \longrightarrow \frac{\text{ker}(d^p \otimes B)}{\text{Im}(d^{p-1} \otimes B)} \longrightarrow 0
 \end{aligned}$$

$$\therefore H^p(X_\eta, \mathcal{F}_\eta) \cong \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_\eta} k(\eta) \quad (**)$$

またこれより.

$$H^{p-1}(K' \otimes_A B) \cong \frac{\mathbb{Z}^{p-1} \otimes_A B}{\text{Im}(d_{p-2} \otimes B)} \cong H^{p-1}(K') \otimes_A B$$

$$\therefore H^{p-1}(X_n, \mathcal{F}_n) \cong (R^{p-1}f_* \mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} k(x).$$

Cor 3

$f : X \rightarrow Y$; Noether スキーム間の固有射.

$\mathcal{F} : Y$ 上平坦な X 上の連接層.

(Y は 被約 であることも OK). ~~← 未定?~~

$$\exists \quad p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall x \in Y, \quad H^p(X_n, \mathcal{F}_n) = (0)$$

$$\Rightarrow \quad \forall x \in Y, \quad R^{p-1}f_* \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} k(x) \xrightarrow{\sim} H^{p-1}(X_n, \mathcal{F}_n)$$

②

再 u^* . $Y = \text{Spec}(A)$, K^* ; Then と同様 なる.

仮定により. $\forall x \in Y$,

$$K^{p-1} \otimes k(x) \xrightarrow{d^M} K^p \otimes k(x) \xrightarrow{d^p} K^{p+1} \otimes k(x)$$

is exact sequence.

$$\ker(d^p) = \text{Im}(d^{p-1})$$

← 複素性 いい? →

~~(Lem 2) 非).~~ $K^P \otimes k(\eta) = \overline{W}_1 \oplus \overline{W}_2$

完全性 あり.

s.t.

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{W}_1 = \text{Im}(d^{P-1} \otimes k(\eta)) \quad (\simeq \text{Ker}(d^P \otimes k(\eta))) \\ d^P \otimes k(\eta)|_{\overline{W}_1} = 0 \\ \overline{W}_2 \hookrightarrow K^{P+1} \otimes k(\eta) \quad : \text{単射.} \end{array} \right.$$

(Cor 3) は 局所的 な問題 なので, A を 局所環

A_f ($f \in A, f(\eta) \neq 0$) に 置換えてもよい.

この f を 上手く 与える こと により,

$$K^P = W_1 \oplus W_2$$

$$\text{s.t.} \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \overline{W}_1 = W_1 \otimes k(\eta) \\ (b) \quad W_1 \subset \text{Im}(d^{P-1}) \end{array} \right.$$

と して よい.

しかし, この とき,

$$\overline{W}_2 = W_2 \otimes k(\eta) \xrightarrow{d^P \otimes k(\eta)} K^{P+1} \otimes k(\eta)$$

が 単射 なので, 上手く A_f を 与える こと により,

$$W_2 \longrightarrow K^{P+1}$$

も 単射 と して よい.

($\because$ 中山の補題で, kernel が η の 近傍 で 消える)

よって、 $(W_2 \text{ かつ } d^P \text{ による } W_2 \text{ の } d^P \text{ の像})$

$$\text{Im}(d^{P-1}) \cap W_2 = (0)$$

より、

$$W_1 = \text{Im}(d^{P-1}).$$

W_1 は 射影空間 $\mathbb{P}^{P-1}$ である。

$$0 \rightarrow \ker(d^{P-1}) \rightarrow K^{P-1} \rightarrow W_1 \rightarrow 0$$

は split である。 $K^{P-1} \cong \ker(d^{P-1}) \oplus W_1$, $W \cong W_1$
 $(= \text{Im}(d^{P-1}))$

よって、

$$\left\{ \begin{array}{l} K^{P-2} \xrightarrow{d^{P-2}} \ker(d^{P-1}) \rightarrow H^{P-1}(X, \mathbb{F}) \rightarrow 0 \\ K^{P-2} \otimes k(y) \xrightarrow{d^{P-2} \otimes k(y)} \ker(d^{P-1}) \otimes k(y) \rightarrow H^{P-1}(X_y, \mathbb{F}_y) \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

$(1 \text{ の } \mathbb{F} \text{ の } \mathbb{F}_y) \otimes k(y) \text{ である。}$

$$K^{P-2} \otimes k(y) \rightarrow \ker(d^{P-1}) \otimes k(y) \rightarrow H^{P-1}(X, \mathbb{F}) \otimes k(y) \rightarrow 0$$

$$\parallel \qquad \parallel$$

$$K^{P-2} \otimes k(y) \rightarrow \ker(d^{P-2}) \otimes k(y) \rightarrow H^{P-1}(X_y, \mathbb{F}_y) \rightarrow 0$$

$$\therefore H^{P-1}(X, \mathbb{F}) \otimes k(y) \cong H^{P-1}(X_y, \mathbb{F}_y)$$

□

Cor 4

$X, Y, \mathcal{F} : \text{同上.}$

$$k \geq k_0, \quad R^k f_* \mathcal{F} = (0)$$

$$\Rightarrow H^k(X_\eta, \mathcal{F}_\eta) = 0 \quad \text{for all } \eta \in Y, k \geq k_0$$

(?) Cor 3 を繰り返し使うことは OK.

Cor 5

$X, Y, f, \mathcal{F} : \text{同上} \quad (Y = \text{Spec}(A))$

$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$.

$\mathcal{B}$ は "平坦 A -加群" 仮定.

$$H^p(X \times_Y \text{Spec}(\mathcal{B}), \mathcal{F} \otimes_A \mathcal{B}) \simeq H^p(X, \mathcal{F}) \otimes_A \mathcal{B}$$

(?)

$$\cdots \rightarrow K^{p-1} \xrightarrow{d^{p-1}} K^p \xrightarrow{d^p} K^{p+1} \rightarrow \cdots$$

$$\cdots \rightarrow K^{p-1} \otimes_A \mathcal{B} \xrightarrow{d^{p-1} \otimes \mathcal{B}} K^p \otimes_A \mathcal{B} \xrightarrow{d^p \otimes \mathcal{B}} K^{p+1} \otimes_A \mathcal{B} \rightarrow \cdots$$

これより $H^p(K^\bullet \otimes_A \mathcal{B}) \simeq H^p(K^\bullet) \otimes_A \mathcal{B}$ が得る.

具体的に $0 \rightarrow \text{Im}(d^{p-1}) \rightarrow \ker(d^p) \rightarrow H^p(K^\bullet) \rightarrow 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \rightarrow \text{Im}(d^{p-1}) \otimes \mathcal{B} \rightarrow \ker(d^p) \otimes \mathcal{B} \rightarrow H^p(K^\bullet) \otimes \mathcal{B} \rightarrow 0 \\ \parallel \qquad \qquad \qquad \parallel \qquad \qquad \qquad \parallel \\ 0 \rightarrow \text{Im}(d^{p-1}) \otimes \mathcal{B} \rightarrow \ker(d^p) \otimes \mathcal{B} \rightarrow H^p(K^\bullet \otimes \mathcal{B}) \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

Cor 6 (See Saw Thm.)

X : 完備代数的様体

T : 任意の代数的様体

L : $X \times T$ 上の line bl.

このとき.

$$T_1 := \{ t \in T \mid L|_{X \times \{t\}} \text{ は } X \times \{t\} \text{ 上の自明束} \}$$

は T の 閉部分集合 を 定める.

また. $X \times T_1$ において.

$\exists M$: line bundle on T_1

$$\text{s.t. } L|_{X \times T_1} \simeq p_1^* M.$$

②

Claim

X : 完備代数的様体

M : X 上の line bundle

において.

「 M が 自明束 になる」

$\Leftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dim H^0(X, M) > 0 \\ \dim H^0(X, M^{-1}) > 0 \end{array} \right\}$$

② $(\Rightarrow)$ は明か.

$$[\Leftarrow] \quad \left\{ \begin{array}{l} \dim H^0(X, M) > 0 \\ \dim H^0(X, M^{-1}) > 0 \end{array} \right. \quad \text{とすると.}$$

$$0 \neq \tau \circ \sigma : \mathcal{O}_X \xrightarrow{\sigma} M \xrightarrow{\tau} \mathcal{O}_X$$

よって, $\tau(\sigma(1))$ は $\mathcal{O}_X$ の non-zero section.

X は 完備 なので, $H^0(X, \mathcal{O}_X) = k$.

∴ $\tau\sigma(1)$ は 0でない 定数.

よって, $\tau \circ \sigma$ は 同型写像, ことに τ, σ も同型.

[Cor 6 の 証明]

(Claim) より, T_i は,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dim H^0(X \times \{t\}, L|_{X \times \{t\}}) > 0 \\ \dim H^0(X \times \{t\}, L^{-1}|_{X \times \{t\}}) > 0 \end{array} \right. \quad (i \geq 1)$$

とすれば $t \in T$ の 集合.

(Cor 1) ♪.

$$\begin{array}{ccc} d : T & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ t & \longmapsto & \dim H^0(X \times \{t\}, L^{\pm 1}|_{X \times \{t\}}) \end{array}$$

は、上半連続なので、 T_1 は T の閉集合.

$$\left(\text{i.e., } \forall \alpha \in \mathbb{Z}, \{t \in T \mid d(t) < \alpha\} \text{ は open} \right. \\ \left. \Leftrightarrow \{t \in T \mid d(t) \geq \alpha\} \text{ は closed} \right)$$

T を T_1 に置きかえて、 $T = T_1$ とする.

(T は 単に k 上 finite reduced scheme)

$\forall t \in T, L|_{X \times \{t\}}$ は Trivial 2".

$$\dim_{k(t)} H^0(X \times \{t\}, L|_{X \times \{t\}}) = 1$$

$\therefore$ (Cor 2) ♪. $\mathcal{P}_2 + (L)$ ($=: \mathcal{M}$) は T 上の可逆層.

また,

$$H^0(X \times \{t\}, L|_{X \times \{t\}}) \rightarrow \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t)$$

は同型.

$L|_{X \times \{t\}}$ は trivial だってから.

$$\varphi : \mathcal{P}_2^* \mathcal{M} \longrightarrow L$$

" $\mathcal{P}_2^* \mathcal{P}_2^* L$

は. $X \times \{t\}$ 上では 変化する射 $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$
と なる.

$\therefore \forall t \in T$, φ は $X \times \{t\}$ 上 同型.

(中山の補題) より. φ は 全射.

ところが $\text{rank} = 1$ なので φ は 同型

□