

Ch. II Algebraic Theory via Varieties

§4. Definition of Abelian varieties.

k : 任意の代数体.

Def

X が k 上の $\mathbb{A}^1$ -群の様体 であるとは.

X が k 上の 完備代数的様体 である.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{二項演算} \\ \text{逆元} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} m: X \times X \longrightarrow X \\ l: X \longrightarrow X \end{array}$$

k ともに、代数的様体の同射と対応するもの. k 与えられているとき という.

§1 に於. $k = \mathbb{C}$ のとき. X は 複素トーラス.

Q. 一般の k についてはどうか?

Prop (i)

アーベル的様体 X は 非特異.

(-!)

X の 非特異点 x_0 をとる.

(X の 既約成分 X_0 をとれば.
 X_0 には 非特異点 が存在)

$\forall x \in X,$

$$\begin{array}{ccc} T_{(x, x_0^{-1})} : & X & \longrightarrow X \\ \omega & & \omega \\ \eta & \longmapsto & x x_0^{-1} \eta \end{array}$$

と定めて, $T_{(x, x_0^{-1})}$ は X 上の 双正則写像 也.

$$T_{(x, x_0^{-1})}(x_0) = x x_0^{-1} x_0 = x$$

このとき, $\mathcal{O}_{x_0, X} \simeq \mathcal{O}_{x, X}$

い、 x にも 非特異

□

Prop (ii)

$\mathcal{P}$ -ハル多様体 X は 可換群.

(i)

[Proof Var. I] ($k = \mathbb{C}$ の一般化)

$\left\{ \begin{array}{l} e : X \text{ の 単位元.} \\ \mathcal{O}_{X,e} : e \text{ における 局所環.} \\ \mathfrak{m}_{X,e} : \mathcal{O}_{X,e} \text{ の 極大 ideal} \end{array} \right.$

$x \in X$ に対し.

$$C_x : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \\ \downarrow \eta & & \downarrow \eta \\ \eta & \longmapsto & x \eta x^{-1} \end{array}$$

η を定める. ($C_x(e) = e$). このとき.

$$\begin{array}{ccc} C_x^* : \mathcal{O}_{X,e} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X,e} \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_{x,\eta}^* : \mathcal{O}_{X,e} / \mathfrak{m}_{X,e}^n & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X,e} / \mathfrak{m}_{X,e}^n \end{array}$$

η を与える.

に $\neq$).

$$\begin{array}{ccc} \gamma : & X & \longrightarrow \text{Aut}(\mathcal{O}_{X,e}/\mathfrak{m}_{X,e}^n) \\ & \downarrow & \downarrow \\ & x & \longmapsto C_{x,n}^{\dagger} \end{array}$$

を得る.

$$\text{Aut}(\mathcal{O}_{X,e}/\mathfrak{m}_{X,e}^n) \subset \text{End}(\mathcal{O}_{X,e}/\mathfrak{m}_{X,e}^n) \quad \leftarrow \text{Affine var.}$$

に $\neq$). $\text{Aut}(\mathcal{O}_{X,e}/\mathfrak{m}_{X,e}^n)$ を 代数的様体 とする.

γ は 代数的様体の間の射.

特に, $\text{Aut}(\mathcal{O}_{X,e}/\mathfrak{m}_{X,e}^n)$ は アフィン代数的様体.

$$\gamma : X \longrightarrow \text{Aut}(\mathcal{O}_{X,e}/\mathfrak{m}_{X,e}^n)$$

は, 完備代数的様体 から アフィン代数的様体 への射

$\therefore \gamma$ は 定数射 (あとで)

$$\gamma(e) = \{\text{id}\} \subset \text{Aut}(\mathcal{O}_{X,e}/\mathfrak{m}_{X,e}^n) \quad \neq \emptyset.$$

$$\forall x \in X, \quad \forall n > 0, \quad C_{x,n}^{\dagger} = \text{id}.$$

一方, $\bigcap_n m_{x,e}^n = (0)$ ($\because$ Krull の交又定理) より

$$C_x^\sharp : \mathcal{O}_{x,e} \longrightarrow \mathcal{O}_{x,e}$$

も $C_x^\sharp = \text{id}$ ($\text{for } \forall x \in X$) を満たす かつ,

$$C_x : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \eta & \longmapsto & x\eta x^{-1} \end{array}$$

は e の近傍で $C_x = \text{id}$.

X は 既約 かつ, $\forall x \in X, C_x = \text{id}$.

$$\therefore \forall \eta \in X, \eta = C_x(\eta) = x\eta x^{-1}.$$

$$\text{かつ, } x\eta = \eta x$$

□

以下, X の 2 項演算 を “+” で表す

$x \in X$ に対し,

$$T_x : X \longrightarrow X ; \eta \longmapsto x + \eta$$

$$h_x : X \longrightarrow X ; x \longmapsto hx$$

を定義. ($h \in \mathbb{Z}_{>0}$)

Prop (iii)

$$T := T_0 X \quad (\text{0での接空間})$$

$$\Omega_0 := T_0^* X$$

ここで、 $\Omega_0 \otimes_k \mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} \Omega_X^1$ がある。

(ここで、 Ω_X^1 : X 上の正則 1-形式 のなす層。)

(ii) 各 $\theta \in \Omega_0$ に対し、 X 上の 1-形式 ω_θ を

$$(\omega_\theta)_x := T_{-x}^* (\theta) \quad (T_{-x} : \text{平行移動})$$

で定める。

これは $(\omega_\theta)_0 = \theta$ を満たす 唯一つの

Translation-invariant 1-form on X

しかも ω_θ は 正則 1-形式。

ゆえに、
 $\Omega_0 \otimes_k \mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} \Omega_X^1$ を得る。
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $\theta \longmapsto \omega_\theta$ $(T_x^* \omega_\theta)_y = (\omega_\theta)_y = T_{-y}^* (\theta)$

$$(\omega_\theta)_{x+y} = T_{-(x+y)}^* (\theta)$$

$$\boxed{T_x^* \omega_\theta = \omega_\theta}$$

$$(\omega_\theta)_{x_0} := T_{-x_0}^* (\theta)$$

$$T_{-x_0} : X \rightarrow X$$

$$\omega_{x_0} \mapsto \omega_0$$

$$T_{-x_0}^* : \Omega_0 \rightarrow \Omega_{x_0} := T_{x_0}^* X$$

$$\theta \mapsto T_{-x_0}^* (\theta)$$

$$\begin{aligned} \left(T_x^* \omega_\theta \right)_{x_0} &= T_x^* \left((\omega_\theta)_{x_0 - x} \right) \\ &= T_x^* \left(T_{-(x_0 - x)}^* \theta \right) \\ &= T_{(2x - x_0)}^* \theta \\ &= (\omega_\theta)_{x_0} \end{aligned}$$

$$T_x \circ T_y = T_{x+y}$$

$$\begin{aligned} T_x \circ T_y (a) &= T_x (a+y) = a+y+x \\ &= a+(x+y) = T_{x+y} (a) \end{aligned}$$

$$T_x : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longmapsto & x \end{array} \quad (\omega_0)_x := T_x^{-1}(\omega)$$

$$\underline{T_x^*} : T_x^* X \xrightarrow{\sim} \Omega_0 = T_0^* X \quad \text{を用いて.}$$

$$(\omega_0)_x \longmapsto \omega_0$$

$$\Omega_0 \otimes \mathcal{O}_{X,x} / \underline{m_{X,x}} \xrightarrow{\sim} \Omega_{X,x}^1 \otimes k(x)$$

Nakayama の補題により $\Omega_0 \otimes \mathcal{O}_x \cong \Omega_x$. □

X : 完備・連結 ため $H^0(X, \mathcal{O}_X) = k$.

∴ X 全体で正則な微分形式は. Translation invariant.

Remark (i)

X : 完備代数多様体 $/k$ へて.

$$H^0(X, \mathcal{O}_X) = k.$$

☺ $\tilde{f} : X \xrightarrow{f} \mathbb{A}_k^1 \hookrightarrow \mathbb{P}_k^1$ へて

$$X \times \mathbb{P}_k^1 \supset \Gamma = \{ (x, y) \in X \times \mathbb{P}_k^1 \mid y = \tilde{f}(x) \} : \text{図}$$

$$\begin{array}{c} \pi \\ \downarrow \\ \mathbb{P}_k^1 \end{array}$$

X : 完備 $\Rightarrow \pi(\Gamma)$ は $\mathbb{A}_k^1$ の閉集合.

X : 完備 ため $\pi(\Gamma) = \{pt\}$ - 点 □

Rem (ii)

完備かつアフィンな既約代数的様体は1点.

⑦

Rem (i) より $k[X] = k$. $\therefore X = \text{Spec}(k)$

□

Rem (iii)

X : 完備 代数的様体

V : アフィン 代数的様体. 433.

$f: X \rightarrow V$ morphism は一点への定数写像

⑧

$f(X) \subset V$ は V の閉部分代数的様体.

よって、 $f(X)$ は アフィン、かつ 完備.

$\therefore f(X) = \{pt\}$ は一点.

□

Prop (iv)

$p \neq n$ なるすべての $n \in \mathbb{Z}$ に対し.

n_x は 全射.

解答

$$T_{(0,0)}(X \times X) \cong T_1 \oplus T_2$$

$$T_i \cong T_0 X = T \quad (i=1,2)$$

$$\begin{array}{ccc} i_1 : X & \longrightarrow & X \times X \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ x & \longmapsto & (x, 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} i_2 : X & \longrightarrow & X \times X \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ x & \longmapsto & (0, x) \end{array}$$

このとき, $(dm)(t_1, t_2) = t_1 + t_2$

$$\left(\begin{array}{l} \textcircled{i} \quad dm(0, t_2) = t_2, \quad dm(t_1, 0) = t_1 \\ dm \text{ は linear} \end{array} \right)$$

これを帰納的に繰り返して.

$$(dn_x)_0(t) = nt$$

$$(t \in T_0 X =: T)$$

$$\begin{array}{ccc} n_x : X & \xrightarrow{\Delta_n} & \overbrace{X \times X \times \cdots \times X}^n \xrightarrow{m} X \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ x & \longmapsto & (x, x, \dots, x) \longmapsto x + \cdots + x = nx \end{array}$$

[Proof of Prop]

$p \neq n$ とする. (これは)

$$(dn_x)_0 : \begin{array}{ccc} T & \rightarrow & T \\ \omega & & \omega \\ t & \mapsto & nt \end{array} \quad (T = T_0 X)$$

は同型.

$$h_x : X \rightarrow X ; x \mapsto nx$$

さて, もし n_x が全射でなければ, 次元を勘定して

$$\dim n_x^{-1}(0) > 0 \quad \dim n_x(X) < \dim X$$

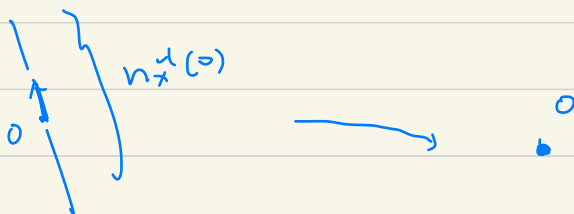
よって, $0 \in n_x^{-1}(0)$ における, 0 でない接ベクトル $t \in T$

が存在.

このとき, $dn_x(t) = 0$ となり, dn_x が同型ではないことに矛盾.

□

$$n_x(0) = 0$$



[X の可換性 2]

Rigidity Lemma

X : 完備代数の様体.

Y, Z : 任意の代数の様体

$f : X \times Y \rightarrow Z$; morphism

s.t.

$$\exists y_0 \in Y, \quad f(X \times \{y_0\}) = \{z_0\} \in Z.$$

これより,

$$\exists g : Y \rightarrow Z$$

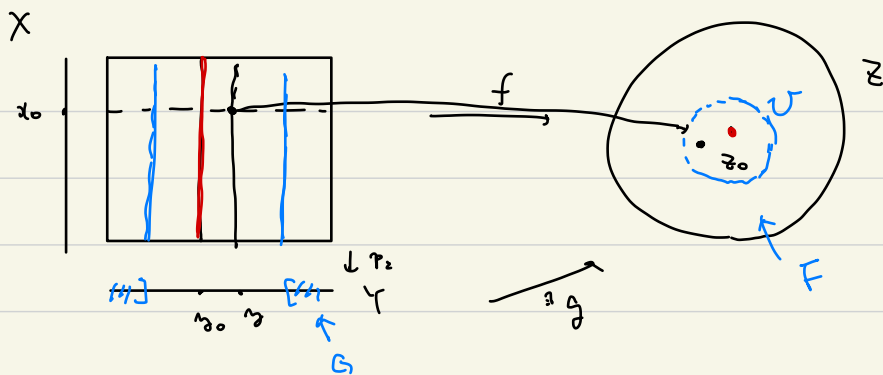
s.t.

$$p_2 : X \times Y \rightarrow Y \quad (\text{射影}) \text{ により}$$

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{f} & Z \\ p_2 \downarrow & \nearrow g & \\ Y & & \end{array}$$

$$f = g \circ p_2$$

これで.



X 上の適当な点 x_0 を選んで.

$$g: Y \rightarrow Z$$

4. $g(y) = f(x_0, y)$ として定義.

$X \times Y$ は既約なので, $X \times Y$ 上のある open 上で

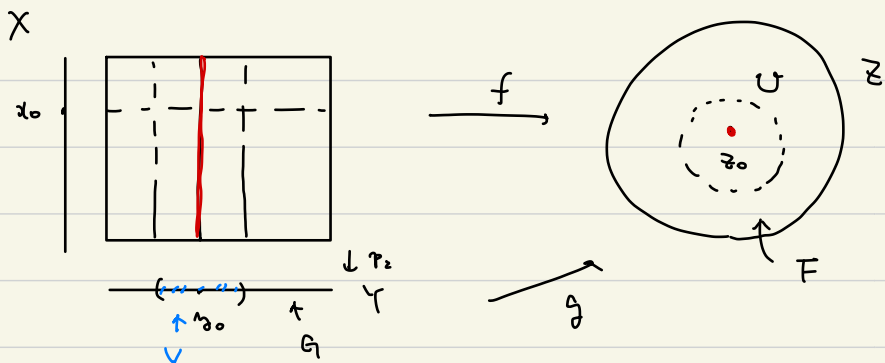
$$f = g \circ p_2 \quad \text{を示せば良い.}$$

$U: z_0 (\in Z)$ の affine open.

$$F := Z \setminus U, \quad G := p_2(f^{-1}(F)) \quad \text{とおく.}$$

$f^{-1}(F)$ は X の closed subset である. X : 完備性.

G は Y の closed subset. (完備性の定義)



$$f(X \times \{y_0\}) = \{z_0\} \quad \text{if} \quad y_0 \notin G.$$

$\therefore Y \setminus G := V$ is a Zariski open subset of Y .

Rem

直接 $V := p_2(f^{-1}(U))$ is a Zariski open subset (open because U is open).

For $y \in V$, the affine variety $X \times \{y\}$ is

$f^{-1}(U)$ is a Zariski open subset of $X \times \{y\}$.

$$f|_{X \times \{y\}} : X \times \{y\} \rightarrow U$$

is a map to a point, $f(X \times \{y\}) = \{z_y\} \subset U$.

$$\text{if } x \in X, y \in V, \quad f(x, y) = g(x, y) = g \circ p_2(x, y)$$

$$\therefore X \times V \xrightarrow{f} Z \quad f = g \circ p_2$$

Cor 1

X, Y : $\mathcal{P}$ - $\mathcal{V}$ の様体.

$f: X \rightarrow Y$; 任意の射.

このとき, $f(x) = h(x) + a$.

$$\begin{cases} h: X \rightarrow Y & ; \text{群準同型} \\ a \in Y & (\text{平行移動}) \end{cases}$$

と分解できる.

(-)

f を $f - f(0)$ におきかえ, $f(0) = 0$
つまり $a = 0$ とおくとよい.

射 $X \times X \xrightarrow{\phi} Y$ と

$$\phi(x, y) = f(x+y) - f(y) - f(x)$$

で定める. このとき,

$$\phi(X \times \{0\}) = \phi(\{0\} \times X) = 0$$

$\therefore$ Lem 1). $X \times X$ 全体で $\phi \equiv 0$

$\therefore f$ は 群準同型 ($f(x+y) = f(x) + f(y)$).

Cor 1 には Commutativity は 図 保持された.

Cor 2

X は 可換群.

⊙

$$\begin{array}{ccc} \ell : & X & \longrightarrow X \\ & \underbrace{x} & \longmapsto \underbrace{-x} \end{array}$$

は. $\ell(0) = 0$ かつ (Cor 1) による.

X 上の 群準同型.

$$\therefore \forall x, y \in X, \quad \ell(xy) = \ell(x)\ell(y)$$

$$\therefore y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1}$$

□

$$(y'x' = x'y')$$

Cor 3

X : アーベル的群体.

0 : X の基点

このとき, $\mathcal{C}_*$: 基点つきの完備代数的群体のなす圏
とする. 写手.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_* & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{S} & \longmapsto & \mathbf{Hom}_*(\mathcal{S}, X) \end{array}$$

基点を保存する morphism の集合. $\uparrow$ hom.

は 総取り, $\forall \mathcal{S}, \mathcal{T} \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C}_*)$ に対し.

$$\begin{array}{ccc} \Phi : \mathbf{Hom}_*(\mathcal{S}, X) \times \mathbf{Hom}_*(\mathcal{T}, X) & \longrightarrow & \mathbf{Hom}_*(\mathcal{S} \times \mathcal{T}, X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (f, g) & \longmapsto & h \end{array}$$

$$(h(s, t) = f(s) + g(t))$$

は 全単射.

(i) s_0, t_0 : $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ の基点.

$$\left(\begin{array}{l} f(s_0) = 0, \quad g(t_0) = 0 \\ h(s_0, t_0) = 0 + 0 = 0 \end{array} \right)$$

[単射]

$$(h \equiv 0 \Rightarrow f \equiv 0 \text{ か } g \equiv 0.)$$

$$t \in t_0 \text{ に固定して, } 0 \equiv f(s) + g(t_0) = f(s)$$

$$s \in s_0 \text{ に固定して, } 0 \equiv f(s_0) + g(t) = g(t)$$

$$\therefore h \equiv 0 \Rightarrow f \equiv 0 \text{ か } g \equiv 0.$$

$\therefore \Phi$ は単射.

[全射性]

$$\forall h \in \text{Hom}_+(S \times T, X) \text{ に対して.}$$

$$\begin{cases} f(s) := h(s, t_0) \\ g(t) := h(s_0, t) \end{cases} \text{ とおす.}$$

$$k(s, t) := h(s, t) - f(s) - g(t) \text{ とおす.}$$

$$k(S \times \{t_0\}) = k(\{s_0\} \times T) = 0.$$

$$\therefore \text{Rigidity lemma より } k \equiv 0.$$

$$\therefore h(s, t) = f(s) + g(t)$$