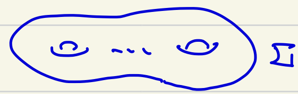
§1. ベクトル束のモジュライ空間

§2. Hitchin系 & スペクトル曲線

§3. 非可換ホッジ理論 $/\mathbb{C}$

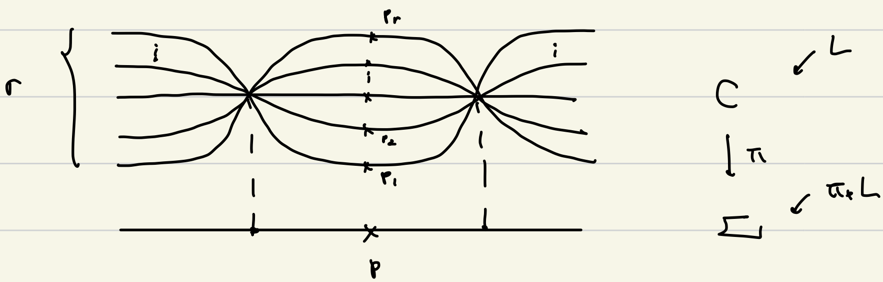
§1

Σ : コンパクトで非特異な代数曲線, $g(\Sigma) = g$
(リーマン面).



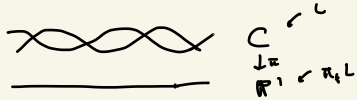
「ベクトル束のモジュライ空間」の導入として.
直線束の順像で表せる Σ 上のベクトル束を考える:

$\pi : C \longrightarrow \Sigma$; 分岐 r 重被覆



このとき, $L \in \mathrm{Pic}(C)$ (つまり C 上の直線束) は
Σ 上の rank の ベクトル束 $E = \pi_* L$ を定める.
($p \notin \{$分岐点$\}$ なら $E_p \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} L_{p_i}$, $\pi^{-1}(p) = \{p_1, \cdots, p_r\}$.)

[跳躍現象]



例)

$\pi : C \to \mathbb{P}^1$; 分岐2重被覆, $g(C) > 0$.

もし $\chi(L) = 0$ (つまり $\deg(L) = g-1$) なら

Riemann-Roch で $\deg(\pi_* L) = -2$.

このとき $\ell := h^0(C, L) = h^0(\mathbb{P}^1, \pi_* L)$ とおくと,

$$\pi_* L \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell - 1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-\ell - 1).$$

$L \in \mathrm{Pic}^{g-1}(C)$ を連続的に変化させることを考える.

$\to$ $\pi_* L$ も連続的に変化する(はず).

$[L] \in \Theta \subset \mathrm{Pic}^{g-1}(C)$
$\to h^0(C, L) = 1$ (or $h^1(C,L) = 1$)

ここで, $\mathrm{Pic}^{g-1}(C)$ のテータ因子を Θ として.

$$\begin{cases} L_t \notin \Theta & (t \neq 0) \\ L_0 \in \Theta & (t = 0) \end{cases}$$

となる1パラメータ族 $\{L_t\}$ を考える.

このとき,

$$\begin{cases} \pi_* L_t \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) & (t \neq 0) \\ \pi_* L_0 \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) & (t = 0) \end{cases}$$

このような状況を「跳躍現象」という.

Jumping phenomenon.

この ような 族 も 含めて ベクトル束 を パラメトライズ するような
空間 (モジュライ空間) を 考えようとすると、都合の悪い空間ができる.
(ハウスドルフでない、など).

⇝「良い」幾何学的性質 を 持った 空間 を 得るには.
ベクトル束 を 取捨選択 しないといけない.
((半)安定 ベクトル束).

Def

E : Σ 上の ベクトル束.
E に対し. slope $\mu(E)$ を

$$\mu(E) := \frac{\deg(E)}{\mathrm{rank}(E)}$$

で定める. また. すべての (非自明な) 部分束
$0 \subsetneq F \subsetneq E$ に対して.

$$\mu(F) \underset{(=)}{<} \mu(E)$$

が成り立つとき. E は (半)安定 である. という

Thm (Mumford, Seshadri)

以下の性質をみたすような Σ 上のベクトル束のモジュライ空間 $\mathcal{U}^{s}_{\Sigma}(r,d) \subset \mathcal{U}^{ss}_{\Sigma}(r,d)$ が存在する.

(1) $\mathcal{U}^{s}_{\Sigma}(r,d)$ は滑らかな代数的多様体で、その各点は $\mathrm{rk} = r,\ \deg = d$ の安定ベクトル束の同型類に対応する.
特に、$\mathcal{U}^{s}_{\Sigma}(r,d)$ は $\mathcal{U}^{ss}_{\Sigma}(r,d)$ の開集合.

(2) $\mathcal{U}^{ss}_{\Sigma}(r,d)$ は射影的代数的多様体で、その各点は $\mathrm{rk} = r,\ \deg = d$ の半安定ベクトル束の同型類に対応する.

(3) $\mathcal{U}^{s}_{\Sigma}(r,d)$, $\mathcal{U}^{ss}_{\Sigma}(r,d)$ はともに粗モジュライ (coarse moduli)

Rem (Moduli Problems / Moduli Functors)

次のような(反変)函手を考える.

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{F}(-) : & \mathfrak{Sch}^{op} & \longrightarrow & \mathfrak{Set} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & S & \longmapsto & \mathcal{F}(S) \end{array}$$

s.t. $\mathcal{F}(S) = \{ S$ によってパラメトライズされる同値類の族 $\}$.

$\left(\begin{array}{ll} \mathfrak{Sch} : & \text{スキームのなす圏} \\ \mathfrak{Set} : & \text{集合のなす圏} \end{array} \right)$

$$\left(\text{cf.}\quad \begin{array}{ccccc} [E_1] & & [E_2] & \in \mathcal{F}(S) & (= \text{vec. bdls}/\sim) \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ s_1 & & s_2 & S & (= \mathcal{U}_C^s(r,d)) \end{array}\right)$$

このとき、$\mathcal{F}(-)$ を表現する組 (M, Φ) のことを $\mathcal{F}(-)$ の精密モジュライ (fine moduli) と言う。

$$\left(\begin{array}{l} \text{自然同値} \\ \Phi : \mathcal{F}(-) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(-, M) \end{array}\right)$$

また、次の条件をみたすスキーム M を $\mathcal{F}(-)$ の粗モジュライ (coarse moduli) という。

(i) 自然変換 $\Phi : \mathcal{F}(-) \longrightarrow \mathrm{Hom}(-, M)$ が存在.

(ii) $\Phi(\{\text{point}\}) : \mathcal{F}(\{pt\}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\{pt\}, M)$ が全単射.

(iii) Φ は次の普遍性をみたす:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(-) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\Psi"'] & \mathrm{Hom}(-, M) \arrow[d, dashed, "\exists ! \Omega"] \\ & \mathrm{Hom}(-, N) \end{tikzcd}$$

変形理論から次の Lem が従う:

Lem

$g(\Sigma) \geqq 2$ とする。 $\mathcal{U}^{ss} := \mathcal{U}^{ss}_{\Sigma}(r,d)$, $\mathcal{U}^{s} := \mathcal{U}^{s}_{\Sigma}(r,d)$ とおく。

(1) $\dim \mathcal{U}^{ss} = 1 + r^2(g-1)$, $\mathcal{U}^{s}$ は $\mathcal{U}^{ss}$ の open dense subscheme

(2) 安定ベクトル束は単純 (simple)

(つまり $H^0(\Sigma, \mathrm{End}(E)) = \mathbb{C}$)

(3) 安定ベクトル束の同型類に対応する $\mathcal{U}^{ss}$ の点は非特異

(4) $T_{[E]}\mathcal{U}^{s} \simeq H^1(\Sigma, \mathrm{End}(E))$ $\updownarrow$ Serre dual

$T^*_{[E]}\mathcal{U}^{s} \simeq H^0(\Sigma, \mathrm{End}(E) \otimes \Omega^1_{\Sigma})$

§2 Hitchin系 & スペクトル曲線

Def (ACIHS)

(M, ω) : 滑らかなシンプレクティック代数多様体.

B : 滑らかな代数多様体.

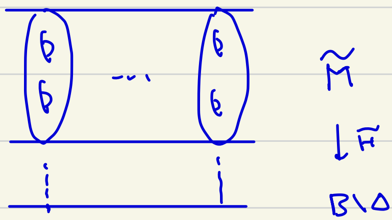
平坦射 $H : M \to B$ は、次の条件をみたすとき、

代数的完全可積分系 (algebraically completely integrable Hamiltonian system) という:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "H"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \exists\, \widetilde{M} \arrow[dl, "\widetilde{H}"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

: M のコンパクト化

M のコンパクト化 $\widetilde{M}$ と平坦射 $\widetilde{H}:\widetilde{M}\to B$ が存在して、
上の図式が可換となり、
B のある固有な閉部分多様体 Δ の補集合 $B\setminus\Delta$ 上で、
$\widetilde{H}$ はファイバーがアーベル多様体に同型であるような
ラグランジュファイバー束である。 $\simeq$ 複素トーラス



Thm (Hitchin)

(ACIHS)

$T^*\mathcal{U}_\Sigma^{ss}$ 上には自然に代数的完全可積分系の構造が入る。

この可積分系を Hitchin可積分系 または Hitchin系 という。

$T^*\mathcal{U}_\Sigma^{s}$ の全空間は次のような組 (E,φ) のなす空間：

(1) E は Σ 上の $\mathrm{rk}(E)=r$, $\deg(E)=d$ の安定ベクトル束。

(2) $\varphi\in H^1(\Sigma,\mathrm{End}(E))^*\simeq H^0(\Sigma,\mathrm{End}(E)\otimes\Omega^1_\Sigma)$

つまり、1-form に値を持つ E の自己準同型写像

$$\varphi: E \longrightarrow E\otimes\Omega^1_\Sigma$$

このような組 (E,φ) を Higgs束 という。

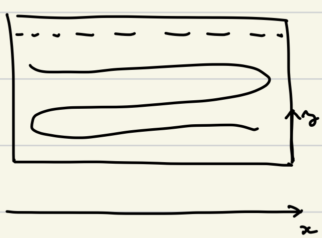
Hitchin 系のハミルトニアンは、次のように φ の特性多項式の係数を対応させることで得られる.

$$\begin{array}{cccc} H : & T^*\mathcal{U}_\Sigma & \longrightarrow & B_\omega := \bigoplus_{i=1}^{r} H^0(\Sigma, \Omega_\Sigma^{\otimes i}) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & (E, \varphi) & \longmapsto & P := [(b_1, \dots, b_r)] \end{array}$$

$$\begin{aligned} \underline{P}(\varphi, y) &= \det(\varphi - y I_r) \\ &= y^r - \mathrm{tr}(\varphi)\, y^{r-1} + \cdots + (-1)^r \det(\varphi) \\ &= \sum_{i=0}^{r} b_i \cdot y^{r-i} \end{aligned}$$

$$b_i := (-1)^i \,\mathrm{tr}(\wedge^i \varphi) \in H^0(\Sigma, \Omega_\Sigma^{\otimes i}), \quad b_0 = 1.$$

$$C := (\underline{P}(\varphi, y) = 0) \subset \mathrm{Tot}(\Omega_\Sigma^1)$$ を考える.



$$\begin{array}{ll} C \swarrow L & \subset \mathrm{Tot}(\Omega_\Sigma^1) \\ \downarrow \pi & \\ \Sigma \swarrow \pi_* L = E & \end{array}$$

このような曲線 C $(\subset \mathrm{Tot}(\Omega_\Sigma^1))$ を<u>スペクトル曲線 (spectral curve)</u> という.

$\left(\pi : C \to \underset{\underset{x}{\rotatebox{90}{$\in$}}}{\Sigma} \text{ のファイバーは } \varphi_x \text{ の固有値に対応 } (\varphi_x : E_x \to E_x \otimes \Omega_x^1) \right)$

Prop (BNR Correspondence)

Cを被約かつ既約で滑らかなスペクトル曲線とする. このとき

$\{(E,\varphi)$ でスペクトル曲線が C のもの$\}/\simeq$

$\{C$ 上の直線束 $L\}/\simeq$

の間には全単射が存在する.

($L_{(x,y)}$ は φ_x の固有ベクトルに対応する).

$$
\begin{array}{ccc}
H : T^*\mathcal{U}_\Sigma^s & \longrightarrow & B_\omega \\
\cup & & \cup \\
H^{-1}(p) & \longrightarrow & \{p\}
\end{array}
$$

$H^{-1}(p) \underset{\text{open}}{\subset} \mathrm{Pic}^\delta(C)$, $\delta = d + r(1-g_\Sigma) + g_C - 1$

$= \{L \mid C$ 上の $\deg(L)=\delta$ の直線束$\}/\sim$

ファイバーとして $\mathrm{Pic}^\delta(C)$ 全体を得るためには,
安定性の定義を緩める必要がある.

Def

組 (E,φ) は、すべての φ-不変部分束 F に対して

（つまり、$0 \subsetneq F \subsetneq E$ で $\varphi(F) \subset F \otimes \Omega^1_\Sigma$ な部分束に対して）

$$\mu(F) \underset{(-)}{<} \mu(E)$$

が成り立つとき、(半)安定 Higgs束 という。

Thm (Hitchin, Simpson)

半安定 Higgs束 の同型類をパラメトライズする粗モジュライ

$\mathrm{Higgs}_\Sigma(r,d)$ が存在する。

$$\begin{tikzcd}
T^*\mathcal{U}^s_\Sigma \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "H"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \mathrm{Higgs}_\Sigma(r,d) \arrow[dl, "\tilde{H}"] & \supset \mathrm{Pic}^d(C) \\
& B_\omega & \supset \{0\} &
\end{tikzcd}$$

§3. 非可換ホッジ理論

上述の安定性の定義を考える意義(の一つ)として、次の定理たちが挙げられる:

Thm

次の2つのモジュライ空間の間には、(実解析的な)微分同相写像が存在する。

$$\mathrm{Higgs}_\Sigma(r,0) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^{(\text{semi-simple})}(\pi_1(\Sigma), GL_r(\mathbb{C}))/\sim_{GL_r(\mathbb{C})}$$

$A \sim B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists Q \in GL_n(\mathbb{C})$ s.t. $B = QAQ^{-1}$

Thm (Riemann-Hilbert correspondence)

$\mathrm{Conn}_\Sigma(r)$: Σ 上の平坦接続のモジュライ空間。

$\nabla : E \to E \otimes \Omega^1_\Sigma$ s.t. $\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s$.

このとき、次の複素解析的な同型射が存在する。

$$\mathrm{Conn}_\Sigma(r) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^{(s.s)}(\pi_1(\Sigma), GL_r(\mathbb{C}))/\sim$$

$$\Big(E_\rho = (\tilde{\Sigma} \times \mathbb{C}^r)/\pi_1(\Sigma),\ \nabla_\rho\Big) \longmapsfrom \rho$$

$$(E, \nabla) \longmapsto (\text{monodromy})$$

3つの重要なモジュライ空間が表れた

- ⓑ ベッチ・モジュライ空間 (Betti moduli) $\mathrm{Hom}^{(s.s)}(\pi_1(\Sigma), GL_r(\mathbb{C}))/\sim$
- ⓓ ド・ラーム・モジュライ空間 (deRham moduli) $\mathrm{Conn}_\Sigma(r)$
- ⓓ ドルボー・モジュライ空間 (Dolbeault moduli) $\mathrm{Higgs}_\Sigma(r,0)$

上述の対応以外にも様々な対応がある。

(小林-Hitchin対応, λ-接続, 調和束, ...).

何故「非可換ホッジ」理論と呼ばれているのか???　(※イメージ)

コンパクトケーラー多様体 X に対するホッジ理論

$$H^n_{dR}(X,\mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}_{Dol}(X)$$

$$\left(H^{p,q}_{Dol}(X) := H^q(X, \Omega^p_X) \right)$$

$n=1$ のとき, $H^1(X,\mathbb{C}) \simeq H^1(X,\mathcal{O}_X) \oplus H^0(X,\Omega^1_X)$

"ベッチ"　"接続"　"Higgs"

$$H^1(X,\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Hom}(H_1(X,\mathbb{Z}),\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Hom}(\pi_1(X),\mathbb{C})$$

において, $\mathbb{C}$ を $GL_r(\mathbb{C})$ に置き換えると,

- ⓑ $H^1(X,\mathbb{C}) \rightsquigarrow H^1(X, GL_r(\mathbb{C})) \leftrightarrow \mathrm{Hom}(\pi_1(X), GL_r(\mathbb{C}))$ "ベッチ"
- ⓓ $H^1(X,\mathcal{O}_X) \rightsquigarrow \check{H}^1(X, GL_r(\mathcal{O}_X))$ "正則ベクトル束"
- ⓓ $H^0(X,\Omega_X) \rightsquigarrow H^0(X, GL_r(\mathbb{C})\otimes\Omega^1_X)$ "Higgs束"